

## Информационно-измерительная система мониторинга балок в строительных конструкциях

А. П. Локтионов <sup>1</sup> ✉

<sup>1</sup> Юго-Западный государственный университет  
ул. 50 лет Октября, д. 94, г. Курск 305040, Российская Федерация

✉ e-mail: loara@mail.ru

### Резюме

**Цель исследования.** Построение метода и алгоритма редукции измерений параметров идентификации балки в информационно-измерительной системе мониторинга строительных конструкций с измерением прогибов и восстановлением актуальных значений начальных параметров балки и внешней нагрузки при решении обратной задачи Коши.

**Методы.** Решение задачи осуществляется в постановке поперечного изгиба балки по теории Эйлера – Бернулли с помощью метода регуляризации и редукции измерений решением обратной задачи Коши линейной лагранжевой аппроксимацией в процедуре численного дифференцирования функции прогиба балки. Формулируется методология выявления незначимых параметров идентификации балки путем сравнения прогиба балки, вызванного исследуемым параметром, с порогом чувствительности средств измерений. При этом моделируется модификация пространства состояний параметров идентификации с уменьшением его размерности.

**Результаты.** Работоспособность сформулированной экспериментально-расчетной методики подтверждена численным экспериментом с нагрузкой на балку в виде изгибающего момента, сосредоточенной и (или) постоянной распределенной нагрузки. Установлено, что при выявлении незначимых начальных параметров и действующих на балку нагрузок редукция измерений повышает точность восстановления параметров идентификации балки.

**Заключение.** Разработанная методология может быть использована для повышения точности методик обследования строительных объектов на стадии экспериментально-теоретических исследований.

---

**Ключевые слова:** мониторинг; информационно-измерительная система; балка; обратная задача Коши; начальные условия.

**Конфликт интересов:** Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Для цитирования:** Локтионов А. П. Информационно-измерительная система мониторинга балок в строительных конструкциях // Известия Юго-Западного государственного университета. 2021; 25(4): 29-51. <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2021-25-4-29-51>.

Поступила в редакцию 18.10.2021

Подписана в печать 02.11.2021

Опубликована 20.12.2021

## Information and Measurement System for Monitoring Beams in Building Structures

Askold P. Loktionov <sup>1</sup> ✉

<sup>1</sup> Southwest State University  
50 Let Oktyabrya str. 94, Kursk 305040, Russian Federation

✉ e-mail: loapa@mail.ru

### Abstract

**Purpose of research.** The development of a method and algorithm for reducing measurements of beam identification parameters in an information and measurement system for monitoring building structures with measurement of deflections and recovery of actual values of beam initial parameters and external load when solving the inverse Cauchy problem.

**Methods.** The solution of the problem is carried out through formulating the transverse bending of the beam according to the Euler – Bernoulli theory using the method of regularization and reduction of measurements by solving the inverse Cauchy problem by means of linear Lagrangian approximation in the procedure of numerical differentiation of the beam deflection function. A methodology is formulated for identifying insignificant beam identification parameters by comparing the deflection of the beam caused by the parameter under study with the sensitivity threshold of measuring instruments. In this case, the modification of the state space of identification parameters with a decrease in its dimension is simulated.

**Results.** The working capability of the formulated experimental calculation method is confirmed by numerical experiment with a load on the beam in the form of a bending moment, concentrated and (or) constant distributed load. It has been established that when identifying insignificant initial parameters and loads acting on the beam, the reduction of measurements increases the accuracy of restoring the beam identification parameters.

**Conclusion.** The developed methodology can be used to improve the accuracy of inspection methods of construction facilities at the stage of experimental and theoretical research.

**Keywords:** monitoring; information and measurement system; beam; inverse Cauchy problem; initial conditions.

**Conflict of interest.** The author declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

**For citation:** Loktionov A. P. Information and Measurement System for Monitoring Beams in Building Structures. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta = Proceedings of the Southwest State University*. 2021; 25(4): 29-51 (In Russ.). <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2021-25-4-29-51>.

Received 18.10.2021

Accepted 02.11.2021

Published 20.12.2021

\*\*\*

### Введение

При инструментальном обследовании строительных конструкций (в том

числе балок) для определения реальных эксплуатационных нагрузок и воздей-

ствий, воспринимаемых обследуемыми конструкциями, проводят обмерные работы, в частности замеряют прогибы и деформации, что закреплено в документах, регламентирующих проведение обследования и мониторинга технического состояния строительных конструкций<sup>1,2</sup>. В современной научной литературе уделяется большое внимание разработке методик обследования строительных конструкций [1-7]. В работах [8-13] рассматриваются информационно-измерительные системы (ИИС) и алгоритмы оценки конструкций параметрами идентификации. В ряде публикаций [14-18] выполняются исследования коэффициентной граничной обратной задачи по восстановлению коэффициентов дифференциального уравнения упругой линии балки или (и) его правой части для определения начальных условий в обратной задаче Коши и внешней нагрузки на балку. Недостающие граничные условия идентифицируются по дополнительной экспериментальной информации на участке, исключаящем концы балки, что учитывает силовое действие и силораспределение, неравномерность деформаций на концах балки и кинематические смещения упругих опор. В работах [19-25] рассмотрены методы

решения обратных задач на основе методов численного дифференцирования, полиномиальной аппроксимации, линейной лагранжевой интерполяции, а также проведения регуляризации и редукции измерений. В публикациях [26-37] исследовано применение сеточного метода с использованием шага сетки аппроксимации в качестве параметра регуляризации, констант Лебега для выбора оптимального распределения узлов сетки, а также алгоритмов вычисления производных. В работе [37] исследовалось численное дифференцирование для восстановления начальных данных Коши с использованием чебышёвского альтернанса. Представлена методология редукции измерений с размещением точек узлов аппроксимации в точках альтернанса порядка на единицу больше степени полинома Чебышёва первого рода. В то же время вопросы оценки погрешности восстановления актуальных начальных данных Коши еще требуют разработки подходов к уменьшению числа точек аппроксимации. Целью настоящей работы является построение методологии и алгоритма моделирования редукции измерений пространства состояний параметров идентификации балки в информационно-измерительной системе мониторинга строительной конструкции с измерением прогибов и восстановлением актуальных значений начальных параметров балки и внешней нагрузки решением обратной задачи Коши.

<sup>1</sup> ГОСТ 31937-2011. Здания и сооружения. Правила обследования и мониторинга технического состояния. М.: Стандартинформ, 2014. 54 с.

<sup>2</sup> СП 13-102-2003. Правила обследования несущих строительных конструкций здания и сооружений. М.: Стандартинформ, 2011. 47 с.

## Материалы и методы

### Модель измерений и обработки данных (общие подходы)

Особенности обратных задач рассматриваем на примере консольной балки длиной  $l$  постоянного сечения ( $EI = \text{const}$ ) под воздействием нагрузки  $F$ . На рис. 1 указано, что нагрузка  $F$  может быть комбинированной или единичной: постоянной распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$  ( $F = q$ ), изгибающим моментом  $M$  ( $F = M$ ), сосредоточенной нагрузкой  $P$  ( $F = P$ ).

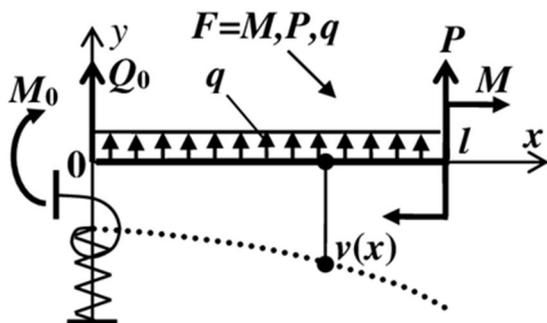


Рис. 1. Балка под нагрузкой

Fig. 1. Beam under load

В задаче Коши по теории Эйлера – Бернулли поперечного изгиба балки прогиб – частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с одним неизвестным  $x$

$$\frac{d^n v}{dx^n} = d_n \quad (1)$$

представим в виде полинома:

$$v(x) = \sum_{r=0}^n \frac{d_{F,r}}{r!} x^r, \quad (2)$$

где  $n$  – порядок дифференциального уравнения (1) и степень уравнения  $v(x)$ ;  $d_{F,n}$  – постоянная ( $d_{F,n} \neq 0$ ), в частности,

$d_{F,4} = v^{(IV)}(0) = q/(EI)$ ;  $d_{F,r} = v^{(r)}(0)$  – коэффициенты полинома ( $r = 0 : n - 1$ ), связанные с начальными параметрами упругой линии балки ( $d_{F,0} = v(0)$  – осадка опоры балки,  $d_{F,1} = v'(0)$  – наклон упругой линии в опорном поперечном сечении балки,  $d_{F,2} = v''(0) = M_0/(EI)$ ,  $d_{F,3} = v'''(0) = Q_0/(EI)$ ;  $M_0, Q_0$  – опорные реакции.

Определим измерительный участок компактом  $[a, b]$  на прямой  $Ox$  (см. рис. 1) при физических ограничениях на сетку узлов аппроксимации в виде:

$$\left. \begin{aligned} \alpha l = a, \quad b = (1 - \alpha)l, \\ a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_N \leq b \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

где  $N$  – количество дискретных значений  $v^*(x_i)$  – измеряемых средствами измерений (СИ) значений функции  $v(x_i)$ ;  $\alpha$  – коэффициент, учитывающий силовое воздействие и силораспределение и исключающий измерения на концах балки из-за кинематического смещения упругой опоры, неравномерности деформаций (по результатам исследования [15] принимаем  $\alpha = 0,05$ );  $i = 1 : N$ .

Значения функций  $y(x_i)$  и  $y^*(x_i)$  – это входные величины в модели измерений; значения измеряемых начальных параметров балки  $d_0, d_1, M_0, P_0$  и постоянной  $d_n$  – выходные величины в модели измерений.

В табл. 1 показано, что элементы нагрузки  $F$  определяют структуру взаимосвязи начальных параметров упругой линии балки, в частности, при  $n \leq 4$ .

Классификацию представления множества начальных параметров и количество измеряемых прогибов  $N$  определяем двумя факторами: порядком  $n$  дифференциального уравнения (1) и характером связи начальных параметров  $M_0 = (EI)d_{F,2}$ ,  $P_0 = (EI)d_{F,3}$ , а также  $q = (EI)d_{F,4}$ , с нагрузкой  $F$ .

Вводим в соответствие вариантам нагрузки  $F$ , указанным в табл. 1, и начальным параметрам, значения которых подлежат определению, матрицу функ-

ций пространства состояний параметров идентификации (табл. 2). Числом в начале обозначения функций указываем значение  $N$ , далее следуют подлежащие определению начальные параметры  $d_0$ ,  $d_1$  и элементы нагрузки. В первом столбце табл. 2 «да» означает необходимость определения значения начального параметра, «нет» – значение начального параметра не определяется (предварительно определено).

**Таблица 1.** Характеристики нагружения балки

**Table 1.** Beam loading characteristics

$F$	$n$	$N$	$d_{F,2}$	$d_{F,3}$	$d_{F,4}$
$M$	2	1-3	$-M/(EI)$	-	-
$P$	3	1-3	$IP/(EI)$	$-P/(EI)$	-
$q$	4	1-3	$lq^2/(2EI)$	$-lq/(EI)$	$q/(EI)$
$M, P$	3	2-4	$(IP - M)/(EI)$	$-P/(EI)$	-
$M, q$	4	2-4	$(lq^2 - 2M)/(2EI)$	$-lq/(EI)$	$q/(EI)$
$P, q$	4	2-4	$(lq^2 + 2P)/(2EI)$	$-(P+lq)/(EI)$	$q/(EI)$
$M, P, q$	4	3-5	$(lq^2 + 2P - 2M)/(2EI)$	$-(P+lq)/(EI)$	$q/(EI)$

**Таблица 2.** Матрица функций пространства состояний параметров идентификации

**Table 2.** Matrix of functions of the state space of identification parameters

$d_0,$ $d_1$	Нагрузка $F$ / Load $F$							
	Нет нагрузки	$M$	$P$	$q$	$M, P$	$M, q$	$P, q$	$M, P, q$
$d_0$ нет, $d_1$ нет	Нет нагрузки	$1M$	$1P$	$1q$	$2MP$	$2Mq$	$2Pq$	$3MPq$
$d_0$ да, $d_1$ нет	Нет нагрузки	$2d_0M$	$2d_0P$	$2d_0q$	$3d_0MP$	$3d_0Mq$	$3d_0Pq$	$4d_0MPq$
$d_0$ нет, $d_1$ да	Нет нагрузки	$2d_1M$	$2d_1P$	$2d_1q$	$3d_1MP$	$3d_1Mq$	$3d_1Pq$	$4d_1MPq$
$d_0$ да, $d_1$ да	Нет нагрузки	$3d_0d_1M$	$3d_0d_1P$	$3d_0d_1q$	$4d_0d_1MP$	$4d_0d_1Mq$	$4d_0d_1Pq$	$5d_0d_1MPq$

Параметрами, характеризующими состояние балки, могут быть опорные смещения и иные пригодные для измерения величины, называемые далее параметрами идентификации. Для идентификации моделей измерений и обработки данных используем указанные в табл. 2 параметры, характеризующие нагружение и опирание балки: значения элементов нагрузки  $M$ ,  $P$ ,  $q$  и значения начальных параметров  $d_0$ ,  $d_1$ .

Модели измерений реализуем в ИИС, включающую СИ и информационную вычислительную систему (ИВС). СИ состоит из датчиков и канала связи [11] или только средств дистанционной регистрации [12].

Решаем обратную задачу Коши для уравнения (1) в общем случае при ненулевых начальных условиях на основе численного дифференцирования. Используем подход метода неопределенных коэффициентов, предусматриваем исключение влияния опорных реакций на начальные условия по вертикальному и вращательному смещению упругой опоры.

Множество измеренных в эксперименте значений  $\{v^*(x_i)\}$  образует пространство наблюдений – конечномерное координатное евклидово пространство отсчетов на сетке (3). Рассматриваем численное дифференцирование с лагранжевой одномерной аппроксимацией первой степени. По предварительно вычисленным значениям лагранжевых коэффициентов в ИВС вычисляются приближенные значения начальных данных Коши,  $r$ -производных  $d_{F,r}$ :

$$\left. \begin{aligned} d_{F,r} &\approx \sum_{i=1}^N L_{F,r,i} v^*(x_i), \\ r &\in (1, 2, \dots, n), r \in R \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

где  $L_{F,r,i}$  – лагранжевы коэффициенты;  $R$  – множество действительных чисел.

Параметром регуляризации условной задачи оптимизации обратной задачи Коши используем распределение узлов сетки (3). Для выбора оптимального распределения узлов сетки используем целевую функцию – константу Лебега второго рода

$$\Lambda_{F,r} = \min \sum_{r=0}^N |L_{F,r,i}|. \quad (5)$$

В сравнительных исследованиях эффективности измерительных методов константу Лебега второго рода используем как минимальное абсолютное значение обусловленности задачи. Мерой влияния приведенной погрешности СИ на абсолютную погрешность определения начальных параметров балки используем безразмерное абсолютное значение числа обусловленности задачи

$$A_{F,r} = l^r \Lambda_{F,r}. \quad (6)$$

К параметрам идентификации модели измерений балки, указанным в табл. 2, добавляем распределение узлов сетки аппроксимации (3), константы Лебега второго рода и безразмерные абсолютные значения числа обусловленности задачи.

В дополнение к вышеизложенным общим подходам к модели измерений и обработки данных частные подходы

уточним на моделях  $3d_0d_1q$ ,  $4d_0d_1Mq$ , и  $4d_0d_1Pq$ .

### Алгоритмы обработки данных СИ

Решаем в ИВС задачу корректной рациональной модификации алгоритмов обработки данных СИ для снижения и последующего оценивания погрешности результатов. Предусматриваем редукцию исходной конечно-элементной модели. Переход от полномасштабной модели к редуцированной существенно уменьшает число значимых начальных параметров (имеющих ненулевые значения) и как следствие этого существенно уменьшает погрешность результатов.

Эту особенность учитываем при создании алгоритмов мониторинга, в подходе к определению качества алгоритмов. При выделении этапов алгоритмов и для оценки качества алгоритмов используем схему:

1) выделяем типовые модели параметров идентификации и исходных данных на входе алгоритма  $mk$ ,  $k=3:5$  ( $m_3 = 3d_0d_1M$ ,  $m_4 = 4d_0d_1MP$ ,  $m_5 = 5d_0d_1MPq$ ) и соответствующие им алгоритмы;

2) проводим замеры прогибов балки в узлах аппроксимации;

3) вычисляем по измеренным прогибам значения начальных параметров и действующих на балку нагрузок, при выявлении среди них незначимых редуцируем пространство состояний параметров идентификации и переходим ко второму этапу;

4) для количественной оценки повышения точности определения начальных параметров оптимизацией числа узлов аппроксимации вводим показатель качества алгоритма

$$\pi_{F,r} = A_{F,r,N_{\max}} / A_{F,r,N_{\text{опт}}}; \quad (7)$$

5) вычисляем (оцениваем) диапазон показателя качества алгоритма на типовых моделях.

Числовые значения показателя качества алгоритма представляем в виде графика.

### Результаты и их обсуждение

#### Модель обработки данных $3d_0d_1q$

По условиям варианта  $F = q$  в табл. 1 представляем уравнение (2) порядка  $n = 4$  в виде

$$\left. \begin{aligned} v_q(x_i) &= d_{q,0} + d_{q,1}x_i + \\ &+ d_{q,4} \frac{l^2 x_i^2}{4} \gamma_{q,i}, \\ \gamma_{q,i} &= \left( 1 - \frac{2x_i}{3l} + \frac{x_i^2}{6l^2} \right), \\ i &= 1:3 \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

Для аппроксимационного многочлена

$$d_{q,4} \approx \sum_{i=1}^3 L_{q,4,i} v^*(x_i) \quad (9)$$

вида (4) согласно процедуре метода неопределенных коэффициентов при использовании уравнения (8) вводим условия

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^3 L_{q,4,i} &= 0, \quad \sum_{i=1}^3 L_{q,4,i} x_i = 0, \\ \frac{l^2}{4} \sum_{i=1}^3 L_{q,4,i} x_i^2 \gamma_i &= 1 \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

Здесь и далее в схожих наборах условий первое и второе условия нулевые для исключения влияния упругости опоры на результаты определения коэффициентов  $d_r$  полинома (2) и начальных параметров при  $r \in (2, 3)$ .

Лагранжевы коэффициенты в многочлене (9) по условиям (10) для уравнения (8) можно вычислять с помощью формул

$$\left. \begin{aligned} L_{q,4,1} &= \frac{4}{l^2 K_q} (x_3 - x_2), \\ L_{q,4,2} &= -\frac{4}{l^2 K_q} (x_3 - x_1), \\ L_{q,4,3} &= \frac{4}{l^2 K_q} (x_2 - x_1) \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

$$\text{где } K_q = \begin{bmatrix} \gamma_{q1} (x_3 - x_2) x_1^2 - \\ -\gamma_{q2} (x_3 - x_1) x_2^2 + \\ +\gamma_{q3} (x_2 - x_1) x_3^2 \end{bmatrix}.$$

Регуляризуем данную задачу численным методом. Результат регуляризации на сетке аппроксимации (3) – распределение узлов сетки с точностью четырех знаков после запятой для числовых коэффициентов:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 0,0500l, \\ x_2 &= 0,3907l, \\ x_3 &= 0,9500l \end{aligned} \right\}, \quad (12)$$

константа Лебега второго рода по формуле (5)  $\Lambda_{q,4} = 130/l^4$  и значение числа обусловленности задачи по формуле (6)  $A_{q,4} = 130$ .

Здесь и далее вычисляем значения координат узлов сетки (3) с точностью четырех значащих цифр, а констант Ле-

бега второго рода и безразмерных абсолютных чисел обусловленности с точностью трех значащих цифр.

В варианте  $F = q$  в табл.1 коэффициент  $d_{q,3}$  отличается от коэффициента  $d_{q,4}$  множителем  $(-l)$ , а коэффициент  $d_{q,2}$  множителем  $(lq/2)$ , следовательно:

$$\left. \begin{aligned} L_{q,3,i} &= -lL_{q,4,i}, \\ \Lambda_{q,3} &= 130/l^3, \\ A_{q,3} &= 130 \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} L_{q,2,i} &= lqL_{q,4,i}/2, \\ \Lambda_{q,2} &= 65,2/l^2, \\ A_{q,2} &= 65,2 \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

*Модель обработки данных  $4d_0d_1Mq$*

По условиям варианта  $F = M, q$  в табл.1 используем уравнение (2) порядка  $n = 4$  в виде

$$\left. \begin{aligned} v_{M,q}(x_i) &= d_{M,q,0} + d_{M,q,1}x_i + \\ &+ d_{M,q,2} \frac{x_i^2}{2} - \\ &- d_{M,q,4} \frac{l^2 x_i^3}{24} (4l - x_i), \\ i &= 1:4 \end{aligned} \right\}. \quad (15)$$

Для аппроксимационного многочлена

$$d_{M,q,4} \approx \sum_{i=1}^4 L_{M,q,4,i} v^*(x_i) \quad (16)$$

вида (4) необходимо выполнить условия

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^4 L_{M,q,4,i} &= 0, \\ \sum_{i=1}^4 L_{M,q,4,i} x_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^4 L_{M,q,4,i} x_i^2 &= 0, \\ \sum_{i=1}^4 L_{M,q,4,i} x_i^3 (4l - x_i) &= -24 \end{aligned} \right\}, \quad (17)$$

которым удовлетворяют лагранжевы коэффициенты

$$\left. \begin{aligned} L_{M,q,4,4} &= 24 \frac{K_{23}}{K_{234}}, \\ L_{M,q,4,3} &= -\frac{K_{24}}{K_{23}} L_{M,q,4,4}, \\ L_{M,q,4,2} &= -(x_3 - x_1) L_{M,q,4,3} - \\ &\quad -(x_4 - x_1) L_{M,q,4,4}, \\ L_{M,q,4,1} &= -\sum_{i=2}^4 L_{M,q,4,i} \end{aligned} \right\}, \quad (18)$$

где  $K_{1,i} = (4l - x_i)x_i^3 - (4l - x_1)x_1^3$ ,

$$i \in (2, 3, 4);$$

$$K_{i,2} = (x_i - x_1)/(x_2 - x_1),$$

$$i \in (3, 4);$$

$$K_{2,i} = (x_i - x_1)(x_i - x_2),$$

$$i \in (3, 4);$$

$$K_{2,3,4} = K_{2,3}(K_{1,4} - K_{4,2}K_{1,2}) -$$

$$-K_{2,4}(K_{1,3} - K_{3,2}K_{1,2}).$$

Регуляризуем данную задачу численным методом. Результат регуляризации на сетке аппроксимации (3) – распределение узлов сетки

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 0,0500l, \\ x_2 &= 0,2527l, \\ x_3 &= 0,6973l, \\ x_4 &= 0,9500l \end{aligned} \right\}, \quad (19)$$

константа Лебега второго рода  $\Lambda_{M,q,4} = 520/l^4$  и значение числа обусловленности задачи  $A_{M,q,4} = 520$ .

В варианте  $F = M, q$  в табл.1 коэффициент  $d_{M,q,3}$  отличается от коэффициента  $d_{M,q,4}$  множителем  $(-l)$ , следовательно, на этот множитель отличаются

лагранжевы коэффициенты и константа Лебега второго рода для  $d_{M,q,3}$ :

$$\left. \begin{aligned} L_{M,q,3,i} &= -lL_{M,q,4,i}, \\ \Lambda_{M,q,3} &= 520/l^3, \\ A_{M,q,3} &= 520 \end{aligned} \right\}, \quad (20)$$

распределение узлов сетки аппроксимации совпадает с распределением (19).

Используем уравнение (15) для аппроксимационного многочлена

$$d_{M,q,2} \approx \sum_{i=1}^4 L_{M,q,2,i} v^*(x_i). \quad (21)$$

Здесь необходимо выполнить условия

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^4 L_{M,q,2,i} &= 0, \\ \sum_{i=1}^4 L_{M,q,2,i} x_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^4 L_{M,q,4,i} x_i^2 &= 2, \\ \sum_{i=1}^4 L_{M,q,4,i} x_i^3 (4l - x_i) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (22)$$

которым удовлетворяют лагранжевы коэффициенты

$$\left. \begin{aligned} L_{M,q,2,4} &= 2 \frac{K_{13} - K_{12}K_{32}}{K_{234}}, \\ L_{M,q,2,3} &= \frac{2 - L_{M,q,2,4}}{K_{23}}, \\ L_{M,q,2,2} &= -\sum_{i=3}^4 K_{i2} L_{M,q,2,i}, \\ L_{M,q,2,1} &= -\sum_{i=2}^4 L_{M,q,2,i} \end{aligned} \right\}. \quad (23)$$

Регуляризуем данную задачу численным методом. Результат регуляризации на сетке аппроксимации (3) – распределение узлов сетки (19), константа Лебега второго рода  $\Lambda_{M,q,2} = 184/l^2$  и значение числа обусловленности задачи  $A_{M,q,2} = 184$ .

Модель обработки данных  $4d_0d_1Pq$  для балки с комбинированной нагрузкой  $P$  и  $q$

По условиям варианта  $F = P, q$  в табл.1 используем уравнение (2) порядка  $n = 4$  в виде

$$\left. \begin{aligned} v_{P,q}(x_i) &= d_{P,q,0} + d_{P,q,1}x_i - \\ &- d_{P,q,3} \frac{x_i^2}{6}(3l - x_i) - \\ &- d_{P,q,4} \frac{x_i^2}{24}(6l^2 - x_i^2), \\ i &= 1:4 \end{aligned} \right\}. \quad (24)$$

Для аппроксимационного многочлена

$$d_{P,q,4} \approx \sum_{i=1}^4 L_{P,q,4,i} v^*(x_i) \quad (25)$$

вида (4) необходимо выполнить условия

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^4 L_{P,q,4,i} &= 0, \\ \sum_{i=1}^4 L_{P,q,4,i} x_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^4 L_{P,q,4,i} x_i^2 (3l - x_i) &= 0, \\ \sum_{i=1}^4 L_{P,q,4,i} x_i^2 (6l^2 - x_i^2) &= -24 \end{aligned} \right\}, \quad (26)$$

которым удовлетворяют лагранжевы коэффициенты

$$\left. \begin{aligned} L_{P,q,4,4} &= \frac{24}{K_{4,3} - K_{6,3}K_{6,4}}, \\ L_{P,q,4,3} &= -K_{4,3}L_{P,q,4,4}, \\ L_{P,q,4,2} &= -K_{3,2}L_{P,q,4,3} - \\ &- K_{4,2}L_{P,q,4,4}, \\ L_{P,q,4,1} &= -\sum_{i=2}^4 L_{P,q,4,i} \end{aligned} \right\}, \quad (27)$$

где  $K_{P,q,1,i} = (3l - x_i)x_i^2 - (3l - x_1)x_1^2$ ,  
 $i \in (2, 3, 4)$ ;

$$K_{i,2,2} = K_{P,q,1,i} - K_{i,2}K_{P,q,1,2},$$

$$i \in (3, 4);$$

$$K_{4,3} = K_{4,2,2}/K_{3,2,2}, i \in (3, 4);$$

$$K_{5,i} = (6l^2 - x_i^2)x_i^2 - (6l^2 - x_1^2)x_1^2,$$

$$i \in (3, 4);$$

$$K_{6,i} = K_{5,i} - K_{i,2}K_{5,2}, i \in (3, 4).$$

Регуляризуем данную задачу численным методом. Результат регуляризации на сетке аппроксимации (3) – распределение узлов сетки

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 0,0500l, \\ x_2 &= 0,2313l, \\ x_3 &= 0,6560l, \\ x_4 &= 0,9500l \end{aligned} \right\}, \quad (28)$$

константа Лебега второго рода  $\Lambda_{P,q,4} = 1184/l^4$  и значение числа обусловленности задачи  $\Lambda_{P,q,4} = 1184$ .

Для аппроксимационного многочлена

$$d_{P,q,3} \approx \sum_{i=1}^4 L_{P,q,3,i} v^*(x_i) \quad (29)$$

с учетом уравнения (24) вводим условия

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^4 L_{P,q,3,i} &= 0, \\ \sum_{i=1}^4 L_{P,q,3,i} x_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^4 L_{P,q,3,i} x_i^2 (3l - x_i) &= -6, \\ \sum_{i=1}^4 L_{P,q,3,i} x_i^2 (6l^2 - x_i^2) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (30)$$

которым удовлетворяют лагранжевы коэффициенты

$$\left. \begin{aligned} L_{P,q,3,4} &= -\frac{6}{K_{4,2,2} - K_{3,2,3}K_{3,2,2}}, \\ L_{P,q,3,3} &= -K_{3,2,3}L_{P,q,3,4}, \\ L_{P,q,3,2} &= -\sum_{i=3}^4 L_{P,q,3,i}K_{i,2}, \\ L_{P,q,3,1} &= -\sum_{i=2}^4 L_{P,q,3,i} \end{aligned} \right\}, \quad (31)$$

где  $K_{3,2,3} = \frac{K_{5,4} - K_{4,2}K_{5,2}}{K_{5,3} - K_{3,2}K_{5,2}}$ .

Регуляризуем данную задачу численным методом. Результат регуляризации – распределение узлов сетки (28), константа Лебега второго рода  $\Lambda_{P,q,3} = 838/l^3$ , число обусловленности задачи  $A_{P,q,3} = 838$ .

Для определения коэффициента  $d_{P,q,2}$  используем уравнение (2) в виде

$$\left. \begin{aligned} v_{P,q}(x_i) &= d_{P,q,0} + d_{P,q,1}x_i + \\ &+ d_{P,q,2} \frac{x_i^2}{6}(3l - x_i) - \\ &- d_{P,q,4} \frac{x_i^3}{24}(2l - x_i), \\ i &= 1:4 \end{aligned} \right\}. \quad (32)$$

Для аппроксимационного многочлена

$$d_{P,q,2} \approx \sum_{i=1}^4 L_{P,q,2,i} v^*(x_i) \quad (33)$$

вида (4) необходимо выполнить условия

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^4 L_{P,q,2,i} &= 0, \\ \sum_{i=1}^4 L_{P,q,2,i} x_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^4 L_{P,q,2,i} x_i^2 (3l - x_i) &= 6l, \\ \sum_{i=1}^4 L_{P,q,2,i} x_i^3 (2l - x_i) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (34)$$

которым удовлетворяют лагранжевы коэффициенты

$$\left. \begin{aligned} L_{P,q,2,4} &= \frac{6l}{K_{4,2,2} - K_{3,2,2} K_{8,4} / (K_{8,3})}, \\ L_{P,q,2,3} &= -K_{8,4} L_{P,q,2,4} / K_{8,3}, \\ L_{P,q,2,2} &= -\sum_{i=3}^4 L_{P,q,2,i} K_{i,2}, \\ L_{P,q,2,1} &= -\sum_{i=2}^4 L_{P,q,2,i} \end{aligned} \right\}, \quad (35)$$

где  $K_{7,i} = (2l - x_i)x_i^3 - (2l - x_1)x_1^3$ ,  
 $i \in (2, 3, 4)$ ;

$K_{8,i} = K_{7,i} - K_{i,2}K_{7,2}$ ,  $i \in (3, 4)$ .

Регуляризуем данную задачу численным методом. Результат регуляризации на сетке аппроксимации (3) – распределение узлов сетки (28), константа Лебега второго рода  $\Lambda_{P,q,2} = 252/l^2$  и число обусловленности задачи  $A_{P,q,2} = 252$ .

Оценивание повышения точности определения начальных параметров оптимизацией числа узлов аппроксимации

В рассмотренных частных примерах модели измерений и обработки данных получены формулы (12), (19), (24) с оптимальным количеством узлов сетки аппроксимации  $N_{\text{опт}} < N_{\text{max}} = n + 1$ , не выполняется исследованное в работе [37] совпадение чебышёвского альтернанса порядка  $n + 1$  с набором  $N$  точек узлов аппроксимации. Здесь введены ограничения в виде алгебраических функций, связывающих начальные данные между собой (табл. 1), что позволило уменьшить количество узлов аппроксимации и безразмерное абсолютное число обусловленности задачи. На рис. 2 показаны пять выборок получен-

ной генеральной совокупности множества элементов  $A_{F,2}$  в моделях измерений и обработки данных с распределенной нагрузкой  $q$  ( $n = 4$ ) в составе нагрузки  $F$ . Максимальное число  $A_{F,2}$  получено при  $N = N_{\max} = n + 1 = 5$ . Остальные числа  $A_{F,2}$  меньше в соответствии с меньшими значениями числа  $N$ .

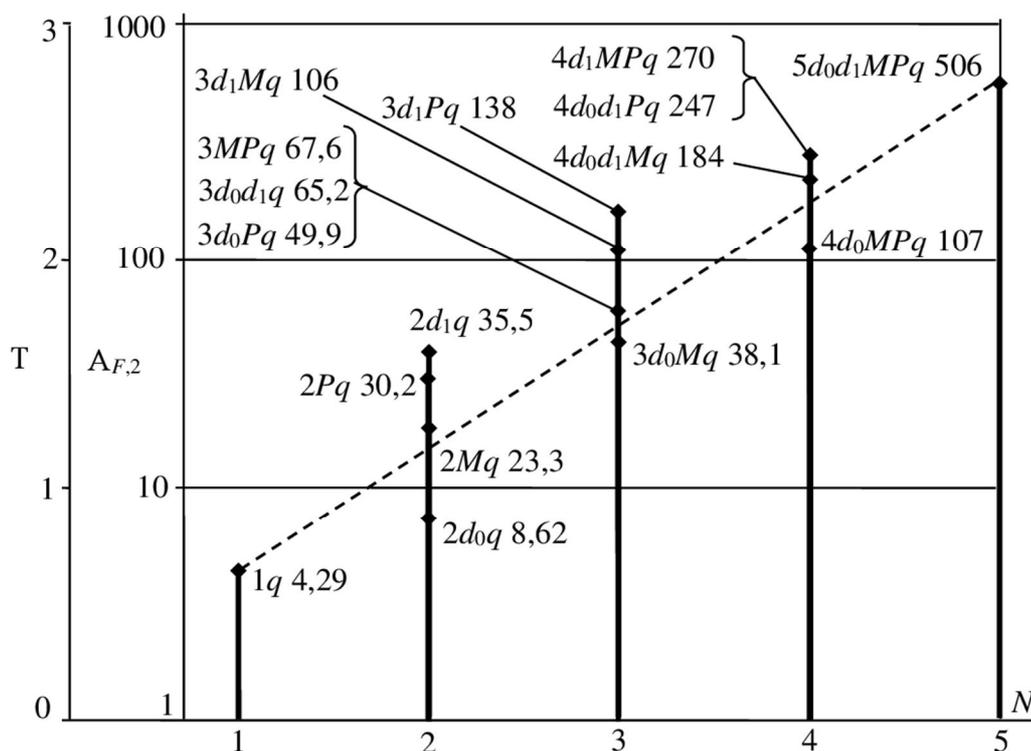
В представленных на рис. 2 упорядоченных в порядке возрастания выборках элементов  $A_{F,2}$ , каждая из выборок имеет общий признак – одинаковое значение числа точек аппроксимации

$N = 1:5$ . Разнообразие элементов  $A_{F,2}$  характеризуем экстремальными крайними значениями  $A_{F,2\min} = 4,29$  и  $A_{F,2\max} = 506$ , размахом  $A_{F,2\max} - A_{F,2\min} = 502$  и псевдолинейной (внутренне линейной) моделью, преобразованной в линейную модель вида:

$$T = 0,114 + 0,518N, \quad (36)$$

где  $T = \log A_{F,2}$ .

Характеристика (36) является неточной, она пригодна для быстрой, ориентировочной оценки чисел  $A_{F,2}$ .



**Рис. 2.** Варианты выборок элементов  $A_{F,2}$  в моделях измерений с распределенной нагрузкой  $q$  в составе нагрузки  $F$

**Fig. 2.** Variants of samples of elements  $A_{F,2}$  in measurement models with distributed load  $q$  as part of load  $F$

На рис. 3 показано, что уменьшение абсолютного числа обусловленности задачи  $A_{F,r}$  связано с уменьшением числа узлов аппроксимации. Точками на рис. 3

указаны координаты  $x_i$  узлов аппроксимации. Точки с одинаковым значением  $i$  в разных моделях измерений соединены нумерованными пунктирными линиями.

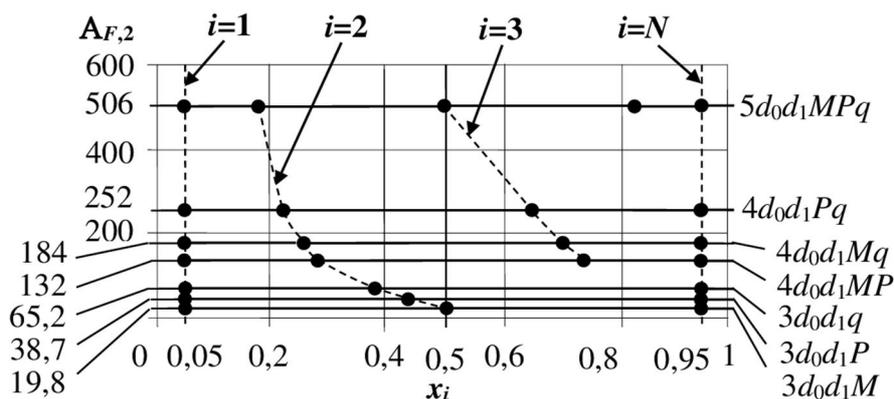


Рис. 3. Безразмерное абсолютное число обусловленности задачи  $A_{4,2}$

Fig. 3. Non-dimensional absolute value of the conditionality of the problem  $A_{4,2}$

На рис. 4 показано, что повышение точности моделей измерений оптимизацией числа узлов аппроксимации достигнуто рациональной модификацией алгоритмов обработки данных СИ. При выявлении среди параметров идентификации балки (начальных параметров

и действующих на балку нагрузок) незначимых, вызывающих прогибы балки менее  $v_0$  – порога чувствительности СИ, выполняется модификация пространства состояний параметров идентификации с уменьшением его размерности.

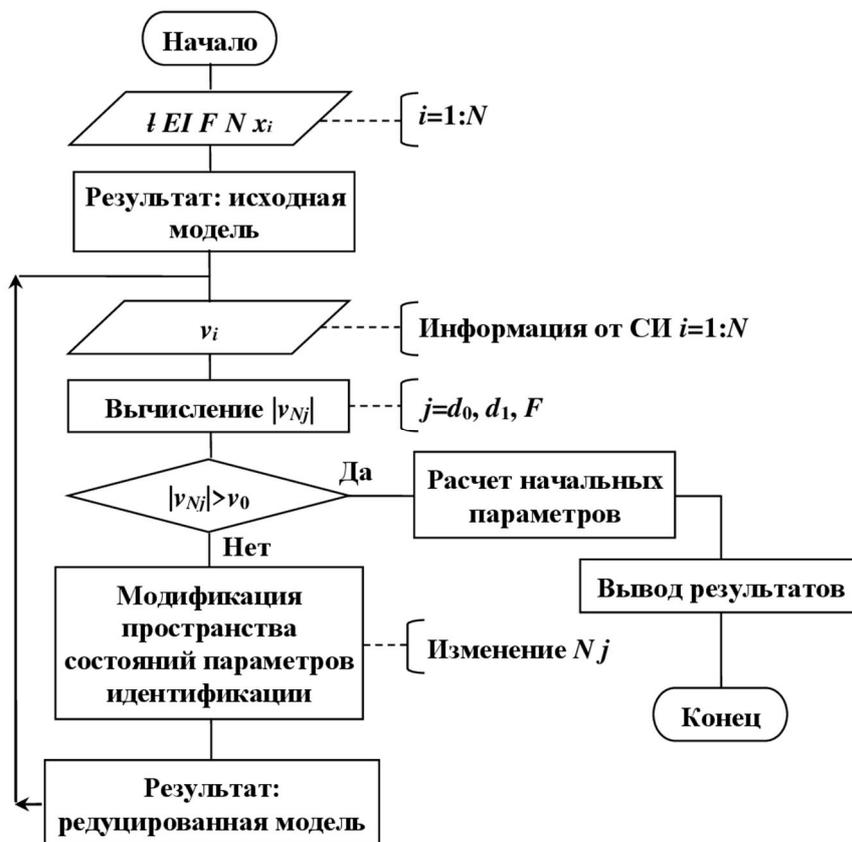


Рис. 4. Алгоритм обработки данных средства измерений

Fig. 4. Algorithm for data processing of measuring instrument

В примере исходной модели  $4d_0d_1MP$  – одной из типовых моделей формируем матрицу функций пространства состояний параметров идентификации вида матрицы в табл. 2. Разнообразие функций в матрице состоит из элементов  $1M$ ,  $2d_0M$ ,  $2d_1M$ ,  $3d_0d_1M$ ,  $2d_0P$ , ...,  $4d_0d_1MP$ . На рис. 5 указано, что матрицу используем при редукции пространства состояний параметров идентификации. На выходе алгоритма получаем актуальные значения начальных параметров балки и внешней нагрузки, позволяющие определить реальную расчетную схему балки, характеристику опоры. В частности, если  $d_0$  – значимый параметр,  $d_1$  незначимый, то опора шарнирная, а если  $d_0$  и  $d_1$  незначимые параметры, то левый конец балки (см. рис. 1) защемлен.

Оценку повышения точности определения начальных параметров показателем качества алгоритма выполнена на примерах моделей, полученных редукцией типовых моделей  $4d_0d_1MP$  и  $5d_0d_1MPq$  для  $r = 2$ . На рис. 6 указано, что у моделей измерений при нагрузках  $M$  или  $P$  значения показателя качества алгоритма  $\pi_{F,2}$ , рассчитанное по формуле (7), составляют 3,4 и 6,7 при значении приведенного на рис. 3 числа обусловленности задачи  $A_{F,2,N_{\max}} = 132$  для модели  $4d_0d_1MP$ . У моделей измерений при комбинациях нагрузок  $M$ ,  $P$  с  $q$  диапазон значений показателя качества алгоритма  $\pi_{F,2}$  составляет 2,0 ... 7,8 с учетом числа обусловленности задачи  $A_{F,2,N_{\max}} = 506$  для модели  $5d_0d_1MPq$ .

Координаты узлов аппроксимации в моделях  $3d_0d_1M$ ,  $3d_0d_1P$ ,  $4d_0d_1MP$  на рис. 3, а также в модели  $1M$  на рис. 5, получены в работе [11]. Координаты узлов аппроксимации в модели  $5d_0d_1MPq$  на рис. 3 получены в работе [37]. Координаты узлов аппроксимации в моделях  $3d_0d_1q$ ,  $4d_0d_1Mq$ ,  $4d_0d_1Pq$  на рис. 3 и в формулах (12), (19), (24), а также в модели  $3d_1MP$  на рис. 5, получены впервые. Впервые получены формулы (11), (18), (23), (27), (31), (35) для вычисления лагранжевых коэффициентов, значений констант Лебега второго рода и безразмерных абсолютных значений числа обусловленности задачи в моделях  $3d_0d_1q$ ,  $4d_0d_1Mq$  и  $4d_0d_1Pq$ .

Рассмотренная процедура, позволяет на основе измеренных прогибов оценивать актуальный набор начальных параметров балки и внешнюю нагрузку при мониторинге балки.

## Выводы

Предложенный экспериментально-расчетный метод мониторинга балки позволяет рассчитать параметры идентификации, характеризующие состояние балки, с учетом повышения точности редукцией измерений при выявлении незначимых начальных параметров и действующих на балку нагрузок. Методология исследований включает математическое моделирование обратной задачи Коши в информационно-измерительной системе с помощью метода редукции измерений и регуляризации.

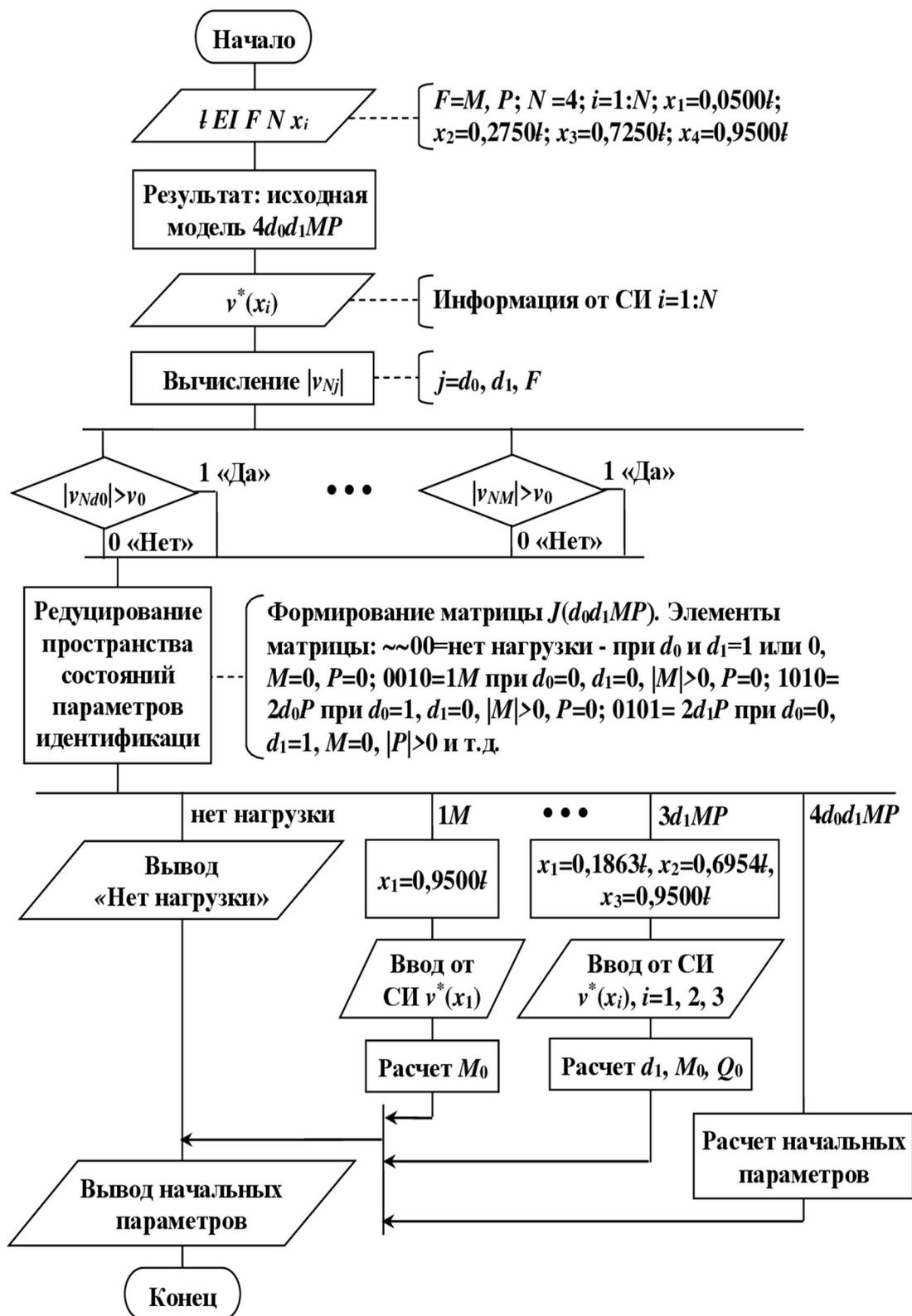
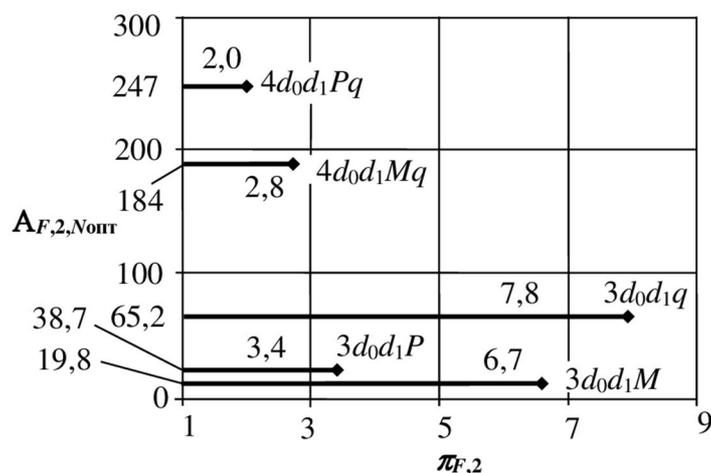


Рис. 5. Алгоритм обработки данных в модели  $4d_0d_1MP$

Fig. 5. Algorithm for data processing in the  $4d_0d_1MP$  model



**Рис. 6.** Повышение точности моделей измерений оптимизацией числа узлов аппроксимации

**Fig. 6.** Improving the accuracy of measurement models by optimizing the number of approximation nodes

На основе метода линейной лагранжевой аппроксимации для поперечного изгиба балки построена процедура численного дифференцирования уравнения прогиба с рассмотрением функциональной взаимосвязи начальных параметров упругой линии балки. При этом принимается во внимание неравномерность

деформаций на концах балки. Работоспособность сформулированного алгоритма подтверждена численным экспериментом для вариантов единичной или комбинированной на-грузки балки в виде изгибающего момента, сосредоточенной нагрузки и постоянной распределенной нагрузки.

### Список литературы

1. Chen H-P., Ni Yi-Q. Structural health monitoring of large civil engineering structures. 111 River Street, Hoboken, NJ 07030, USA: John Wiley & Sons Inc.; 2018. 302 p. <https://doi.org/10.1002/9781119166641>.
2. Kashevarova G. G., Tonkov, Y. L., Tonkov I.L. Intellectual automation of engineering survey of building objects // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2017. №13(3). P. 42-57. <https://doi.org/10.22337/1524-5845-2017-13-3-42-57>.
3. Shi Z., O'Brien W. Development and implementation of automated fault detection and diagnostics for building systems: A review // *Automation in Construction*. 2019. №104. P. 215-229. <https://doi.org/10.1016/j.autcon.2019.04.002>.
4. Lehmhus D., Busse M., Structural health monitoring (SHM). In: Bosse S., Lehmhus D., Lang W. (eds). *Material Integrated Intelligent Systems Technology and Applications: Technology and Applications*. John Wiley & Sons Inc.; 2018, pp. 529–570. 696 p. <https://doi.org/10.1002/9783527679249>.

5. Meshchikhin I. A., Gavryushin S. S. The envelope method in the problem of choosing a rational composition of measuring instruments // *Measurement Techniques*. 2021. №64. pp. 151-155. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11018-021-01910-8>.

6. Перельмутер А.В. Обратные задачи строительной механики // *Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета*. 2020. №22(4). С. 83-101. <https://doi.org/10.31675/1607-1859-2020-22-4-83-101>.

7. Building structural health monitoring using dense and sparse topology wireless sensor network / М.Е. Haque, М.Ф.М. Zain, М.А. Hannan, М.Н. Rahman // *Smart Structures and Systems*. 2015. №16(4). P. 607-621. <https://doi.org/10.12989/sss.2015.16.4.623>.

8. Siraya T. N. Methods of data processing in measurements and metrological models // *Measurement Techniques*. 2018. №61. P. 9-16. <https://doi.org/10.1007/s11018-018-1380-y>.

9. Bakushinsky A.B., Kokurin M.M., Kokurin M.Yu. Regularization algorithms for Ill-posed problems. Boston. USA: De Gruyter; 2018. <https://doi.org/10.1515/9783110557350>.

10. Meshchikhin I. A., Gavryushin S. S. Quality criteria and algorithm for selecting reduced finite element models for technical design monitoring // *Mat. Mod. Chisl. Met.* 2016. №12. P. 103-121. <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2016-4-103121>.

11. Локтионов А.П. Структурная регуляризация подсистемы преобразовательного компонента преобразовательно-вычислительных систем. Курск : Курск. гос. техн. ун-т, 2009. 323 с. <https://elibrary.ru/item.asp?id=19594039>.

12. Huang Y., Ludwig S.A., Deng F. Sensor optimization using a genetic algorithm for structural health monitoring in harsh environments // *Journal of Civil Structural Health Monitoring*. 2016. №6(3). P. 509-519. <https://doi.org/10.1007/s13349-016-0170-y>.

13. A wireless passive sensing system for displacement/strain measurement in reinforced concrete members / В. Ozbey, V.B. Erturk, H.V. Demir, A. Altintas, O.A. Kurc // *Sensors*. 2016. №16(4). P. 1-14. <https://doi.org/10.3390/s16040496>.

14. Локтионов А. П. Информационная система анализа балочных элементов под комбинированной нагрузкой // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2021. №2. С. 45-52. <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2021.2.45.52>.

15. Лалин В.В., Беляев М.О. Изгиб геометрически нелинейного консольного стержня. Решение по теориям Кирхгофа и Коссера – Тимошенко // *Инженерно-строительный журнал*. 2015. №53(1). С. 39-55. <https://doi.org/10.5862/MCE.53.5>. URL: [https://engstroy.spbstu.ru/userfiles/files/2015/1\(53\)/05.pdf](https://engstroy.spbstu.ru/userfiles/files/2015/1(53)/05.pdf).

16. Wang T., He T., Li H. Effects of deformation of elastic constraints on free vibration characteristics of cantilever Bernoulli-Euler beams // *Structural Engineering and Mechanics*. 2016. №59(6). P. 1139-1153. <https://doi.org/10.12989/sem.2016.59.6.000>.

17. Tushina V.M. Semi-rigid steel beam-to-column connections // *Magazine of Civil Engineering*. 2017. №73(5). P. 25-39. <https://doi.org/10.18720/MCE.73.3>. URL: [https://engstroy.spbstu.ru/userfiles/files/2017/5\(73\)/03.pdf](https://engstroy.spbstu.ru/userfiles/files/2017/5(73)/03.pdf).

18. Tushina O.A., Danilov A.I. The stiffness of rigid joints of beam with hollow section column // *Magazine of Civil Engineering*. 2016. №64(4). P. 40-51. <https://doi.org/10.5862/MCE.64.4>. URL: [https://engstroy.spbstu.ru/userfiles/files/2016/4\(64\)/04.pdf](https://engstroy.spbstu.ru/userfiles/files/2016/4(64)/04.pdf).

19. Кудрявцев К.Я. Алгоритм построения полинома наилучшего равномерного приближения по экспериментальным данным // *Вестник национального исследовательского ядерного университета МИФИ*. 2019. №8(5). С. 480-486. <https://doi.org/10.1134/S2304487X1905002X>.

20. Kalenchuk-Porkhanova A. Best Chebyshev approximation for compression of big information arrays // *Proceedings of the 10th International Scientific and Practical Conference named after A. I. Kitov "Information Technologies and Mathematical Methods in Economics and Management (IT&MM-2020)"*. October 15-16, Moscow: Russia, 2020. P. 1-13. URL: <http://sunsite.informatik.rwth-aachen.de/ftp/pub/publications/CEUR-WS/Vol-2830.zip.paper25.pdf>. (дата обращения 20.04.2021).

21. Chekushkin V.V., Mikheev K.V. Fast search algorithms for the best approximation polynomials for reproduction of functional dependences in data-measurement systems // *Measurement Techniques*. 2016. №59(4). P. 351-356. <https://doi.org/10.1007/s11018-016-0970-9>.

22. Loktionov A.P. Improving the polynomial approximation of an object characteristic that is not directly measurable by using measurement reduction // *Measurement Techniques*. 2017. №59(10). P. 1042-1050. <https://doi.org/10.1007/s11018-017-1089-3>.

23. Balakin D. A., Pyt'ev Yu. P. Measurement reduction in the presence of subjective information // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2018. №30(12). P. 84-110. <http://www.mathnet.ru/links/8979c74fdee02631a8d8ed00b41bb7be/mm4028.pdf>.

24. Локтионов А.П. О численном дифференцировании при полиномиальном приближении / Курск. гос. техн. ун-т. Курск, 1999. 28 с. Деп. в ВИНТИ 28.06.99, № 2080-В99. <https://elibrary.ru/item.asp?id=24302755>.

25. Korytov M.S., Shcherbakov V.S., Shershneva E.O., Breus I.V. Approximation methods for the actual trajectory of load carried by overhead crane to the required one – a comparative analysis // *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. 2016. №10(2). P. 45-56. URL: [http://www.sscm.kg.ac.rs/jsscm/downloads/Vol10No2/Vol10No2\\_05.pdf](http://www.sscm.kg.ac.rs/jsscm/downloads/Vol10No2/Vol10No2_05.pdf).

26. Yang C. Sensor placement for structural health monitoring using hybrid optimization algorithm based on sensor distribution index and FE grids // *Structural Control and Health Monitoring*. 2018. №5(6). P. 1-19. <https://doi.org/10.1002/stc.2160>.

27. Favorskaya A.V., Petrov I.B. Grid-characteristic calculation of multistorey buildings destruction // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2020. №32(3). P. 102-114. <https://doi.org/10.20948/mm-2020-03-06>.

28. Loktionov A.P. Information system for analysis of beam elements under combined load // *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2021. №2. P. 45-52. <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2021.2.45.52>.

29. Петров В.В. Нелинейная инкрементальная строительная механика. М., Вологда: Инфра-Инженерия, 2020. 484 с. Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. URL: <https://www.iprbookshop.ru/98391.html> (дата обращения: 09.10.2021).

30. Danilov M. F., Savel'eva A. A. Analysis of basic data of unstable problems of coordinate measurements of geometrical parameters of products // *Measurement Techniques*. №61(6). P. 588-594. <https://doi.org/10.1007/s11018-018-1469-3>.

31. Калиткин Н.Н., Колганов С.А. Построение аппроксимаций, удовлетворяющих чебышевскому альтернансу. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 91. 33 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2020-91> <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-91>

32. Агафонова И.В., Малозёмов В.Н. Экстремальные полиномы, связанные с полиномами Золотарёва // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*. 2020. №65(7). Вып. 1. С. 3-14. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.101>.

33. Малозёмов В.Н., Тамасян Г.Ш. Этюд на тему полиномиальной фильтровой задачи ( $n = 3$ ) // Избранные лекции по экстремальным задачам. Часть вторая. СПб.: Издво ВВМ, 2017. С. 305–315. URL: <http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/ reps15.shtml#0312> (дата обращения: 26.05.2019).

34. Ibrahimoglu B.A. Lebesgue functions and Lebesgue constants in polynomial interpolation // *Journal of Inequalities and Applications*. 2016. №2016:93. P. 1-15. <https://doi.org/10.1186/s13660-016-1030-3>.

35. Алиев М.С. Об одной классификации линейно независимых систем функций // *Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки*. 2021. №36(1). С. 15-23. DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-1-15–23.

36. Loktionov A.P. A measuring system for determination of a cantilever beam support moment // *Smart Structures Systems*. 2017. №19(4). P. 431-439. DOI: 10.12989 / sss.2017.19.4.431.

37. Loktionov A.P. Numerical differentiation in the measurement model // *Measurement Techniques*. 2019. №62. P. 673-680. <https://doi.org/10.1007/s11018-019-01677-z>.

---

**References**

1. Chen H-P., Ni Yi-Q. Structural Health Monitoring of Large Civil Engineering Structures. 111 River Street, Hoboken, NJ 07030, USA: John Wiley & Sons Inc.; 2018. 302 p. <https://doi.org/10.1002/9781119166641>.
2. Kashevarova G. G., Tonkov, Y. L., Tonkov I.L. Intellectual automation of engineering survey of building objects. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2017, no. 13(3), pp. 42-57. <https://doi.org/10.22337/1524-5845-2017-13-3-42-57> (In Russ.).
3. Shi Z., O'Brien W. Development and implementation of automated fault detection and diagnostics for building systems: A review. *Automation in Construction*, 2019, no. 104, pp. 215-229. <https://doi.org/10.1016/j.autcon.2019.04.002>.
4. Lehmhus D., Busse M., Structural Health Monitoring (SHM) in book: Material Integrated Intelligent Systems Technology and Applications: Technology and Applications, 2018, pp. 529–570. <https://doi.org/10.1002/9783527679249>.
5. Meshchikhin I. A., Gavryushin S. S. The envelope method in the problem of choosing a rational composition of measuring instruments. *Measurement Techniques*, 2021, no 64, pp. 151-155. <https://doi.org/10.1007/s11018-021-01910-8>.
6. Perelmuter A.V. [Inverse problems of structural mechanics]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta=Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta. JOURNAL of Construction and Architecture*. 2020; no. 22(4): pp. 83-101. <https://doi.org/10.31675/1607-1859-2020-22-4-83-101> (In Russ.).
7. Haque M.E., Zain M.F.M., Hannan M.A., Rahman M.H. Building structural health monitoring using dense and sparse topology wireless sensor network. *Smart Structures and Systems*, 2015, no. 16(4), pp. 607-621. <https://doi.org/10.12989 / sss.2015.16.4.623>.
8. Siraya T. N. Methods of data processing in measurements and metrological models. *Measurement Techniques*, 2018, no 61, pp. 9-16. <https://doi.org/10.1007/s11018-018-1380-y>.
9. Bakushinsky A.B., Kokurin M.M., Kokurin M.Yu. Regularization Algorithms for Ill-Posed Problems. Boston. USA: De Gruyter; 2018. <https://doi.org/10.1515/9783110557350>.
10. Meshchikhin I. A., Gavryushin S. S. Quality criteria and algorithm for selecting reduced finite element models for technical design monitoring, *Mat. Mod. Chisl. Met.*, 2016, no 12, pp. 103-121. <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2016-4-103121> (in Russ.).
11. Loktionov A. P. [Structural regularization of the subsystem of the converting component of converting computing systems]. Kursk, 2009. 323 p. <https://elibrary.ru/item.asp?id=19594039> (In Russ.).
12. Huang Y., Ludwig S.A., Deng F. Sensor optimization using a genetic algorithm for structural health monitoring in harsh environments. *Journal of Civil Structural Health Monitoring*, 2016, no. 6(3), pp. 509-519. <https://doi.org/10.1007/s13349-016-0170-y>.

13. Ozbey B., Erturk V.B., Demir H.V., Altintas A., Kurc O.A. A wireless passive sensing system for displacement/strain measurement in reinforced concrete members. *Sensors*, 2016, no. 16(4), pp. 1-14. <https://doi.org/10.3390/s16040496>.

14. Loktionov A.P. [Information system for analysis of beam elements under combined load]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenii=Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2021; no. 2, pp. 45–52. <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2021.2.45.52> (In Russ.).

15. Lalin V.V., Belyaev M.O. [Bending of geometrically nonlinear cantilever beam. Results obtained by Cosserat – Timoshenko and Kirchhoff's rod theories]. *Inzhenerno-stroitel'nyi zhurnal=Magazine of Civil Engineering*. 2015; no. 53(1): pp. 39-55. DOI: 10.5862/MCE.53.5. Available at: [https://engstroy.spbstu.ru/userfiles/files/2015/1\(53\)/05.pdf](https://engstroy.spbstu.ru/userfiles/files/2015/1(53)/05.pdf) (In Russ.).

16. Wang T., He T., Li H. Effects of deformation of elastic constraints on free vibration characteristics of cantilever Bernoulli-Euler beams. *Structural Engineering and Mechanics*, 2016, no. 59(6), pp. 1139-1153. <https://doi.org/10.12989/sem.2016.59.6.000>.

17. Tushina V.M. Semi-rigid steel beam-to-column connections. *Magazine of Civil Engineering*, 2017, no. 73(5), pp. 25-39. <https://doi.org/10.18720/MCE.73.3>. Available at: [https://engstroy.spbstu.ru/userfiles/files/2017/5\(73\)/03.pdf](https://engstroy.spbstu.ru/userfiles/files/2017/5(73)/03.pdf).

18. Tushina O.A., Danilov A.I. The stiffness of rigid joints of beam with hollow section column. *Magazine of Civil Engineering*, 2016, no. 64(4), pp. 40-51. <https://doi.org/10.5862/MCE.64.4>. Available at: [https://engstroy.spbstu.ru/userfiles/files/2016/4\(64\)/04.pdf](https://engstroy.spbstu.ru/userfiles/files/2016/4(64)/04.pdf).

19. Kudryavcev K.Ya. [Algorithm for constructing a polynomial of the best uniform approximation from experimental data]. *Vestnik natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI"=Bulletin of the National Research Nuclear University MEPhI*. 2019; no. 8(5): pp. 480-486. <https://doi.org/10.1134/S2304487X1905002X> (In Russ.).

20. Kalenchuk-Porkhanova A. Best Chebyshev approximation for compression of big information arrays. In. *Proceedings of the 10th International Scientific and Practical Conference named after A. I. Kitov "Information Technologies and Mathematical Methods in Economics and Management (IT&MM-2020)"*. October 15-16, Moscow: Russia. 2020. pp. 1-13. Available at: <http://sunsite.informatik.rwth-aachen.de/ftp/pub/publications/CEUR-WS/Vol-2830.zip.paper25.pdf>.

21. Chekushkin V.V., Mikheev K.V. Fast search algorithms for the best approximation polynomials for reproduction of functional dependences in data-measurement systems. *Measurement Techniques*, 2016, no. 59(4), pp. 351-356. DOI: 10.1007/s11018-016-0970-9.

22. Loktionov A.P. Improving the polynomial approximation of an object characteristic that is not directly measurable by using measurement reduction. *Measurement Techniques*, 2017, no. 59(10), pp. 1042-1050. <https://doi.org/10.1007/s11018-017-1089-3>.

23. Balakin D. A., Pyt'ev Yu. P. Measurement reduction in the presence of subjective information. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2018, no. 30(12), pp. 84-110. <http://www.mathnet.ru/links/8979c74fdee02631a8d8ed00b41bb7be/mm4028.pdf>.

24. Loktionov A.P. [On numerical differentiation with polynomial approximation]. *Dep. at VINITI 28.06.99*, no. 2080-B99. 1999, 28 p. <https://elibrary.ru/item.asp?id=24302755> (In Russ.).

25. Korytov M.S., Shcherbakov V.S., Shershneva E.O., Breus I.V. Approximation methods for the actual trajectory of load carried by overhead crane to the required one – a comparative analysis. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*, 2016, no. 10(2), pp. 45-56. Available at: [http://www.sscm.kg.ac.rs/jsscsm/downloads/Vol10No2/Vol10No2\\_05.pdf](http://www.sscm.kg.ac.rs/jsscsm/downloads/Vol10No2/Vol10No2_05.pdf).

26. Yang C. Sensor placement for structural health monitoring using hybrid optimization algorithm based on sensor distribution index and FE grids. *Structural Control and Health Monitoring*, 2018, no. 5(6), pp. 1-19. <https://doi.org/10.1002/stc.2160>.

27. Favorskaya A.V., Petrov I.B. Grid-characteristic calculation of multistorey buildings destruction. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2020, no. 32(3), pp. 102-114. <https://doi.org/https://doi.org/10.20948/mm-2020-03-06>.

28. Loktionov A.P. Information system for analysis of beam elements under combined load. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, 2021, no. 2, pp. 45-52. <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2021.2.45.52>.

29. Petrov V.V. [Nonlinear Incremental Structural Mechanics]. Moscow, Vologda, Infra-Inzheneriya Publ., 2020. 484 p. *Electronic library system IPR BOOKS*: [site], Available at: <https://www.iprbookshop.ru/98391.html> (In Russ.) (accessed 15.09.2021).

30. Danilov M. F., Savel'eva A. A. Analysis of basic data of unstable problems of coordinate measurements of geometrical parameters of products. *Measurement Techniques*, 2018, no. 61(6), pp. 588-594. <https://doi.org/10.1007/s11018-018-1469-3>.

31. Kalitkin N.N., Kolganov S.A. [Construction of approximations that satisfy the Chebyshev alternance]. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha = Keldysh Institute PREPRINTS*. 2020; no. 91: 33 p. [https://keldysh.ru/papers/2020/rep2020\\_91.pdf](https://keldysh.ru/papers/2020/rep2020_91.pdf) (In Russ.).

32. Agafonova I.V., Malozemov V.N. [Extremal polynomials connected with Zolotarev polynomials]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya = Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*. 2020; no. 7(65): is. 1, pp. 3-14. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.101> (In Russ.).

33. Malozemov V.N., Tamasyan G.SH. [A study on a polynomial filter problem ( $n = 3$ )]. *V kn.: Izbrannye lektsii po ehkstremaal'nym zadacham*. [Selected lectures on extremal problems]. Saint-Petersburg, 2017; pp. 305–315. Available at: <http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/reps15.shtml#0312> (In Russ.).

34. Ibrahimoglu B.A. Lebesgue functions and Lebesgue constants in polynomial interpolation. *Journal of Inequalities and Applications*, 2016, no. 2016:93, pp. 1-15. <https://doi.org/10.1186/s13660-016-1030-3>.

35. Aliyev M.S. [On a classification of linearly independent systems of functions]. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1: Estestvennye nauki =Herald of Dagestan State University Series 1. Natural Sciences*. 2021; no. 36(1), pp. 15-23. <https://doi.org/10.21779/2542-0321-2021-36-1-15-23> (In Russ.).

36. Loktionov A.P. A measuring system for determination of a cantilever beam support moment. *Smart Structures Systems*, 2017, no. 19(4), pp. 431-439. <https://doi.org/10.12989/sss.2017.19.4.431>.

37. Loktionov A.P. Numerical differentiation in the measurement model. *Measurement Techniques*, 2019, no. 62, pp. 673-680. <https://doi.org/10.1007/s11018-019-01677-z>.

---

### Информация об авторе / Information about the Author

**Локтионов Аскольд Петрович**, доктор технических наук, профессор кафедры электроснабжения, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская Федерация, e-mail: [loapa@mail.ru](mailto:loapa@mail.ru), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1108-4185>, Researcher ID: P-5434-2015

**Askold P. Loktionov**, Dr. of Sci. (Engineering), Professor of the Department of Power Supply, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: [loapa@mail.ru](mailto:loapa@mail.ru), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1108-4185>, Researcher ID: P-5434-2015