

Чебышёвский альтернанс при аппроксимации начальных условий обратной задачи Коши

А. П. Локтионов¹ 

¹ Юго-Западный государственный университет
ул. 50 лет Октября, д. 94, г. Курск 305040, Российская Федерация

 e-mail: loapa@mail.ru

Резюме

Цель исследования. Работа посвящена кругу вопросов, относящихся к задаче Коши на отрезке действительной оси с приложением к исследованию обратной задачи Коши, в которой по экспериментальным или табличным значениям решения дифференциального уравнения оптимально восстанавливают вещественные константы – начальные условия. В качестве объекта исследования выбрана информационно-измерительная система, в которой по дискретным значениям функции решения задачи Коши вычисляются приближенные значения начальных условий.

Методы. Для этого решены следующие задачи: разработаны параметры размещения измерительного участка на исследуемом объекте и сетка аппроксимации на измерительном участке. Сформулированы характеристики точности восстановления начальных условий задачи.

Результаты. Предложен экспериментально-расчетный метод определения начальных условий в обратной задаче Коши, основанный на понятии целевой функции регуляризации задачи. Также предложен параметр регуляризации задачи в виде минимального значения функцией Лебега.

Заключение. В результате проведенных исследований рассмотрена реакция метода равномерного приближения начальных условий в обратной задаче Коши на отклонение координат узлов сетки аппроксимации от координат Чебышёвского альтернанса. Приведены графики реакции метода на отклонение шага сетки от оптимального шага.

Ключевые слова: задача Коши; начальные условия; чебышёвский альтернанс; информационно-измерительная система.

Конфликт интересов: Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Для цитирования: Локтионов А. П. Чебышёвский альтернанс при аппроксимации начальных условий обратной задачи Коши // Известия Юго-Западного государственного университета. 2021; 25(3): 86-102. <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2021-25-3-86-102>.

Поступила в редакцию 09.07.2021

Подписана в печать 14.09.2021

Опубликована 21.10.2021

Chebyshev Alternance when Approximating Initial Conditions of the Inverse Cauchy Problem

Askold P. Loktionov ¹ ✉

¹ Southwest State University
50 Let Oktyabrya str. 94, Kursk 305040, Russian Federation

✉ e-mail: loapa@mail.ru

Abstract

Purpose of research. The work is devoted to a range of questions related to Cauchy problem on the segment of real axis with the application of the inverse Cauchy problem, in which real constants are initial conditions which are optimally restored according to experimental or tabular values of the solution of the differential equation. The object of the study is an information-measuring system, in which approximate values of initial conditions are calculated from discrete function values of Cauchy problem solving.

Methods. The following problems are solved for this purpose: parameters of measuring section placement on the investigated object and approximation grid on measuring section are developed. Characteristics of recovery accuracy of initial conditions of the task are formulated.

Results. An experimental-calculated method of determining initial conditions in the inverse Cauchy problem is proposed. It is based on the concept of objective function of regularization of the problem. Task regularization parameter in the form of minimum value by Lebesgue function is proposed.

Conclusion. The reaction of uniformly approximating method of the initial conditions of the inverse Cauchy problem to the deviation of the approximation grid coordinates nodes from the coordinates of Chebyshev alternance was described. Graphs of method reaction to deviation of grid pitch from optimal pitch are given.

Keywords: Cauchy problem; initial conditions; Chebyshev's alternance; information and measurement system.

Conflict of interest. The author declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

For citation: Loktionov A. P. Chebyshev Alternance when Approximating Initial Conditions of the Inverse Cauchy Problem. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta = Proceedings of the Southwest State University*. 2021; 25(3): 86-102 (In Russ.). <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2021-25-3-86-102>.

Received 09.07.2021

Accepted 14.09.2021

Published 21.10.2021

Введение

Во многих приложениях математической физики (например, в теоретической механике, гидродинамике, теории упругости) ее модели часто сводятся к краевым задачам для дифференциальных уравнений. Основным инструментом исследования процессов, определя-

емых начальным состоянием и нахождением решения дифференциального уравнения, является задача Коши. Если дано семейство достаточное число раз дифференцируемых функций решения дифференциального уравнения, то можно восстановить начальные условия. Развитие методов вычислительной математики, в частности, численного диф-

ференцирования, позволило приступить к исследованию задачи восстановления начальных условий по экспериментальным (табличным) значениям полиномиальной функции (решения дифференциального уравнения) как обратной задачи Коши [1, 2]. В работе [2] исследована задача с недоступностью измерений на одном конце измеряемого объекта. Обратные задачи, связанные с обработкой экспериментальных данных (результатов наблюдений), могут характеризоваться малым объемом и невысокой точностью [3-7]. В работе [8] обсуждены теоретические и вычислительные вопросы выбора метрологической модели измерений, аттестации алгоритмов обработки данных вычислительным устройством, корректной оценки неопределенности измерений. Для этапа обработки данных формируют модель исходных данных, модель погрешностей, показатели качества алгоритмов обработки данных. При обработке информационно-измерительной системой (ИИС) данных измеренных входных величин в обратных задачах применяют редукцию измерений, полиномиальную аппроксимацию, линейную лагранжеву интерполяцию, методы регуляризации, непараметрические методы [3-5, 9-18]. Простой метод решения некорректной задачи численного дифференцирования – сеточный метод решения на измерительном компакте [7, 15, 19-22]. Обширные результаты получены в исследованиях сеток аппроксимации с постоянным шагом при решении дифферен-

циальных уравнений для аппроксимации граничных условий [7]. Для вычисления производных используют различные алгоритмы, например, алгоритм Ремеза, построение специальной системы нелинейных уравнений [4, 7, 17, 18, 23, 24].

Существует несколько проблем в определении целевых характеристик в обратной задаче Коши. Эти проблемы включают в себя учет погрешности датчиков и оптимизацию распределения датчиков по отрезку задания решения с целью минимизирования влияния погрешности датчиков на результаты расчета целевых характеристик [1, 3, 5, 21, 22, 25, 26]. Сходимость интерполяционных процессов и оценка погрешности интерполяции связана с функциями и константами Лебега [7, 25-28]. Размещение измерительного участка, сопряженного с внешней средой, вызывает рост методической погрешности целевых характеристик [29-31]. В работе [29] решена тестовая задача: стальная консольная балка, длина 10 м, момент инерции $5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$, сосредоточенная нагрузка 4 Т. Установлено, что балка с жесткой опорой находится практически в однородном напряженно-деформированном состоянии на участке $[0,1l, l]$. При нагружении балки на свободном конце сосредоточенной нагрузкой $P \leq 0,32EI l^{-2}$ расхождения между вертикальными перемещениями становятся меньше 1% для поперечных сечений, удаленных от заделки более, чем на $0,056l$.

Развиваемый автором численный метод определения начальных условий в обратной задаче Коши по экспериментальным или табличным значениям функции решения дифференциального уравнения основан на ранее полученных результатах исследований численного дифференцирования [1, 2, 4, 7] и частных результатах восстановления начальных параметров через лагранжевы коэффициенты методом неопределенных коэффициентов [15, 20, 23]. Метод неопределенных коэффициентов имеет недостаток – для восстановления каждого из начальных параметров необходимо составлять новый алгоритм и решать новую систему уравнений для получения новых лагранжевых коэффициентов.

Развиваемый автором метод направлен на получение общего набора подлежащих восстановлению начальных параметров с предварительной оптимизацией сетки аппроксимации параметром регуляризации задачи для получения максимальной точности восстановления начальных параметров, что является актуальным и полезным направлением исследования.

Материалы и методы

Модель измерений и обработки данных

Рассмотрим на множестве действительных чисел, отрезке задания решения – компакте $K_1 = [0, l]$, принадлежащем вещественной плоскости $\mathbb{R}^2$, линейное неоднородное дифференциаль-

ное уравнение с одним неизвестным x и решение этого уравнения

$$\frac{d^n v}{dx^n} = f(x), \quad x \in K_1, \quad (1)$$

$$v(x) = \sum_{r=0}^n \frac{d_{n,r}}{r!} x^r, \quad (2)$$

где n – порядок дифференциального уравнения и степень уравнения $v(x)$; $f(x)$ – постоянная ($f(x) \neq 0$); $v(x)$ – решение задачи Коши; $d_{n,r} = v^{(r)}(x)|_{x=0}$ ($r = 0 : n - 1$).

В продолжение работ [1, 2, 15] рассмотрим класс обратных задач Коши восстановления значений целевых характеристик исследуемого объекта, представляемого дискретными значениями функции $v(x)$. К исследуемым целевым характеристикам относим функцию $f(x)$ и начальные условия, которые в задаче Коши состоят в задании производных функции $v(x)$ при $x = 0$ (данных Коши).

Алгоритм вычисления начальных условий обратной задачи Коши реализуется в ИИС. ИИС состоит из измерительного и вычислительного компонентов. Измерительный компонент включает в себя датчики и канал связи [1].

В системе (измеряемый объект – функция $v(x)$ на компакте K_1 , среда, ИИС) на вход ИИС по числу датчиков поступает N значений функции $v(x)$:

$$v(x_i) = \sum_{r=0}^n \frac{d_{n,r}}{r!} x_i^r, \quad (3)$$

где $i = 1 : N$; $N = n + 1$.

В значениях $v(x_i)$ учитываем влияющие факторы, в том числе связанные с внешней средой.

С учетом современного уровня развития вычислительной техники рассмотрим обратную задачу Коши с погрешностью датчиков и канала связи $R(v_i)$, значительно превосходящей вычислительную погрешность округления в вычислительном компоненте ИИС. На вход вычислительного компонента ИИС от N датчиков в измерительном компоненте ИИС поступают N измеренных значений $v^*(x_i) = v(x_i) + R(v_i)$ функции $v(x)$.

На выходе ИИС получаем восстановленные значения целевых характеристик исследуемого объекта в системе (исследуемый объект – вещественная плоскость, среда).

Заменим функции $v^*(x)$ и $d_{n,r}$ приближенными функциями $F(x)$ и w_j , соответственно, которые просто вычисляются:

$$\left. \begin{aligned} v^*(x) &\approx F_n(x) = \sum_{r=0}^n \frac{w_{n,r}}{r!} x^r, \\ d_{n,r} &\approx w_{n,r} \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Для получения разрешенной системы уравнений воспользуемся условиями Лагранжа в виде:

$$\sum_{r=0}^n \frac{w_{n,r}}{r!} x_i^r = v^*(x_i), \quad (i = 1 : N). \quad (5)$$

Совокупность этих условий при заданных x_i (среди узлов x_i не должно быть совпадающих) образуют систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в покомпонентной форме отно-

сительно неизвестных коэффициентов $w_{n,r}$. В матричной форме система (5) – $Aw = v^*$, где w – столбец неизвестных составим из коэффициентов $w_{n,r}$, v^* – столбец свободных членов составим из табличных (измеренных) i -тых значений функции v^* , а матрицу системы A представим в виде:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2/2 & \dots & x_1^n/n! \\ 1 & x_2 & x_2^2/2 & \dots & x_2^n/n! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2/2 & \dots & x_{n+1}^n/n! \end{pmatrix}.$$

Для получения СЛАУ набор числовых значений функций $x_i^r/r!$ в левых частях уравнений (5) используем в матрице A константами. Матрица A подобна матрице Вандермонда, следовательно, она, как и матрица Вандермонда, хотя неособая, но становится плохо обусловленной при увеличении n . Решением СЛАУ получаем значения целевых характеристик $d_{n,r}$ по второму уравнению (4).

Рассмотрим взаимодействие исследуемого объекта на компакте K_1 с внешней средой. Будем считать, что измерения недоступны на левом и правом конце измеряемого объекта – отрезка $[0, l]$. Воспользуемся принципом Сен-Венана в теории упругости для снижения методической погрешности целевых характеристик, вызванной неравномерностью распределения деформаций внешней среды и компакта K_1 в окрестности точек $x=0$ и $x=l$. Тогда на измеряемом объекте $[0, l]$ сетка аппрок-

симации и измерительный участок $[a, b]$ имеют вид:

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_N \leq b, \quad (6)$$

то есть на компакте $K_2 = [a, b]$ при $a = \alpha_1 l$, $b = (1 - \alpha_2)l$.

Для производных $d_{n,r}$ функции $v(x)$ используем одномерное лагранжевое приближение первой степени

$$d_{n,r} \approx F_n^{(r)}(0) = \sum_{i=1}^{n+1} L_{n,r,i}(0) v^*(x_i), \quad \left. \begin{matrix} r \in (0, 1, \dots, n) \end{matrix} \right\}, \quad (7)$$

где $L_{n,r,i}(0)$ – лагранжевы коэффициенты.

Лагранжевы коэффициенты в аппроксимационной формуле (7) представим в виде:

$$L_{n,r,i}(0) = L_{n,0,i}^{(r)}(x) \big|_{x=0}, \quad (8)$$

$$\text{где } L_{n,0,i}(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} (x - x_j) \bigg/ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} (x_i - x_j),$$

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} (x - x_j) = (x - x_1)(x - x_2) \dots$$

$$\dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)(x - x_{n+1}).$$

Формирование характеристик точности восстановления начальных условий

Рассмотрим при обработке небольшого массива экспериментальных результатов ($N \leq 5$) равномерную непрерывную норму погрешности датчиков и канала связи.

Для оценки уровня погрешности исследуемых целевых характеристик, получаемых решением обратной задачи

Коши, воспользуемся абсолютным числом обусловленности измерительно-вычислительной задачи – величиной $\alpha_{n,r}(0)$, устанавливающей связь между верхними границами абсолютной погрешности датчиков и канала связи $\Delta_{\max}[v(x_i)]$ и решения $\Delta_{\max}[d_{n,r}]$ неравенством

$$\Delta_{\max}[d_{n,r}] \leq \alpha_{n,r}(0) \sup \Delta_{\max}[v(x_i)]. \quad (9)$$

Абсолютное число обусловленности задачи $\alpha_{n,r}(0)$ представим целевой функцией Лебега в виде:

$$\lambda_{n,r}(0) = \alpha_{n,r}(0) = \sum_{i=1}^{n+1} |L_{n,r,i}(0)|, \quad (10)$$

$$r \in (0, 1, \dots, n)$$

Целевая функция Лебега позволяет оценить влияние погрешности датчиков, положения компакта K_2 и распределения датчиков в компакте K_2 на точность экстраполирования исследуемых целевых характеристик.

Параметр регуляризации обратной задачи Коши представим в виде аппроксимационной константы:

$$\lambda_{n,r} = \min \lambda_{n,r}(0) =$$

$$= \min \left\{ \frac{\Delta_{\max}[d_{n,r}]}{\Delta_{\max}[v(x_i)]} \right\}, \quad (11)$$

$$r \in (0, 1, \dots, n)$$

Для определения координат $n+1$ узлов сетки аппроксимации (6) при $n \geq 1$ по аппроксимационной константе воспользуемся координатами Чебышёвских экстремумов в виде:

$$x_i = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos\left(\pi \frac{i-1}{n}\right), \quad (12)$$

$$(i = 1:n+1)$$

Исходя из текущего состояния обработки экспериментальных данных можно сформулировать область применения и основные положения разработанного метода определения начальных условий обратной задачи Коши (далее по тексту «Метод»).

Результаты и их обсуждение

Метод предусматривает размещение измерительного участка на удалении от точки $x=0$ на расстояние, на котором неравномерность распределения деформаций вещественной плоскости $\mathbb{R}^2$ уменьшается настолько, что погрешность Метода, вызванная этой неравномерностью, становится сопоставимой с погрешностью, вызванной датчиками.

При минимизировании погрешности Метода, когда погрешность датчиков значительно превосходит вычислительную погрешность округления, для узлов сетки аппроксимации использованы координаты Чебышёвских экстремумов.

В частности, для $n = 3$ координаты Чебышёвских экстремумов имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x_1 = a, \quad x_2 = \frac{3a+b}{4}, \\ x_3 = \frac{a+3b}{4}, \quad x_4 = b \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

Используем соотношения $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,05$ по результатам исследования [29], при

которых координаты (15) узлов сетки аппроксимации имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} x_1 = 0,0500l, \quad x_2 = 0,275l, \\ x_3 = 0,725l, \quad x_4 = 0,950l \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

Для $n = 4$ координаты Чебышёвских экстремумов представим в виде:

$$\left. \begin{aligned} x_1 = a, \quad x_2 = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{4} \sqrt{2}, \\ x_3 = \frac{a+b}{2}, \\ x_4 = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{4} \sqrt{2}, \quad x_5 = b \end{aligned} \right\}, \quad (15)$$

при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,05$:

$$\left. \begin{aligned} x_1 = 0,0500l, \quad x_2 = 0,182l, \\ x_3 = 0,500l, \quad x_4 = 0,818l, \\ x_5 = 0,950l \end{aligned} \right\}. \quad (16)$$

Анализируются вычислительные программы, реализующие алгоритмы предложенного Метода.

Данный Метод описывает вычисление правой части уравнения (1) и начальных условий обратной задачи Коши с использованием координат (15) Чебышёвских экстремумов для определения узлов сетки аппроксимации (6) для последующего решения СЛАУ по условиям Лагранжа (5) или для вычисления лагранжевых коэффициентов (8) с подстановкой их в правую часть уравнения (7). В частности, начальные условия $d_{4,2}$ и $d_{4,3}$ по (7) и аппроксимационные константы $\lambda_{4,2}$ и $\lambda_{4,3}$ по (11) представимы в виде:

$$\left. \begin{aligned} d_{4,2} &= 4\Gamma_1/(b-a)^4, \quad d_{4,3} = 48\Gamma_2/(b-a)^4, \\ \Gamma_1 &= [6(a+b)(a+3b)-(b-a)^2]y_1 - 2[10(a+b)^2 + 8ab + 3(b^2 - a^2)\sqrt{2}]y_2 + \\ &+ 2[10(a+b)^2 + 8ab - (b-a)^2]y_3 - 2[10(a+b)^2 + 8ab - 3(b^2 - a^2)\sqrt{2}]y_4 + \\ &+ [6(a+b)(3a+b)-(b-a)^2]y_5, \\ \Gamma_2 &= -(3a+5b)y_1 + [8(a+b) + (b-a)\sqrt{2}]y_2 - \\ &- 8(a+b)y_3 + [8(a+b) - (b-a)\sqrt{2}]y_4 - (5a+3b)y_5, \\ \lambda_{4,2} &= 64[5(a+b)^2 + 4ab]/(b-a)^4, \quad \lambda_{4,3} = 1536(a+b)/(b-a)^4 \end{aligned} \right\}, \quad (17)$$

при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,05$:

$$\left. \begin{aligned} d_{4,2} &= (101,14y_1 - 173,12y_2 + 116,69y_3 - 80,008y_4 + 35,299y_5)/l^2, \\ d_{4,3} &= (-358,48y_1 + 678,39y_2 - 585,28y_3 + 492,16y_4 - 226,79y_5)/l^3, \\ \lambda_{4,2} &= 506/l^2, \quad \lambda_{4,3} = 2341/l^3 \end{aligned} \right\}. \quad (18)$$

Результаты сравнительного анализа Метода с известными моделями показывают, что расчет аппроксимационных констант по известным моделям решения дифференциальных уравнений на сетке аппроксимации с постоянным шагом по [7] для аппроксимации граничных (начальных) условий $d_{4,2}$ и $d_{4,3}$ с введением условий $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,05$ к сетке (6) имеют вид:

$$\lambda_{4,2} = 675/l^2, \quad \lambda_{4,3} = 3121/l^3. \quad (19)$$

Результат сравнения аппроксимационных констант в (18) и (19) при одинаковой погрешности датчиков – погрешность аппроксимации известных моделей превышает результат по предложенному Методу на 33 %. Предложенный Метод лучше существующих, не имеющих к сетке (6) условий вида

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,05$ – в Метод с учетом результатов работы [29] в измерениях не используются окрестности точек $x=0$ и $x=l$, где уровень методической погрешности резко возрастает в сравнении с погрешностью датчиков. Указанные преимущества Метода проявляются в технических приложениях вычислительной математике, в частности, для повышения точности методик [6, 32-34] обследования строительных объектов.

Далее рассмотрена реакция Метода на отклонение координат узлов сетки аппроксимации от координат Чебышёвских экстремумов (12). На рис. 1-3 приведены графики реакции Метода на это воздействие в виде безразмерных абсолютных чисел обусловленности задачи $A_{n,r} = l^r \alpha_{n,r}(0) = f(X_s)$, где $X_s = x_s/l$.

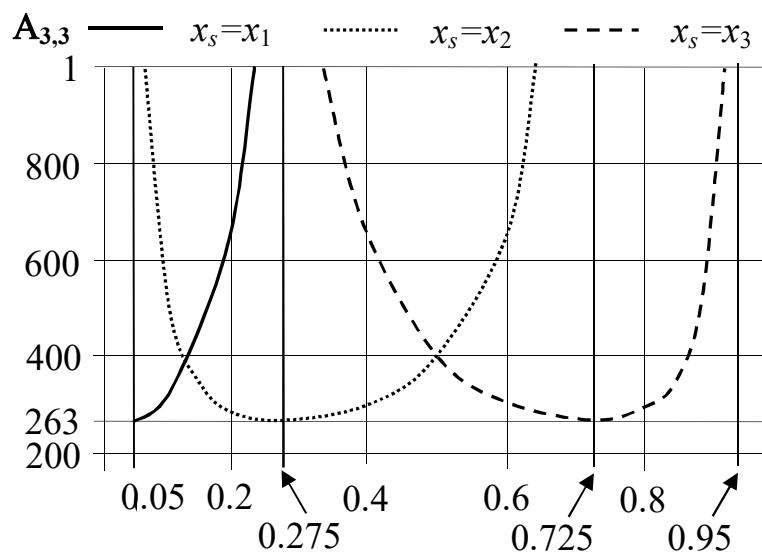


Рис. 1. Безразмерное абсолютное число обусловленности задачи $A_{3,3}$

Fig. 1. Non-dimensional absolute value of the conditionality of the problem $A_{3,3}$

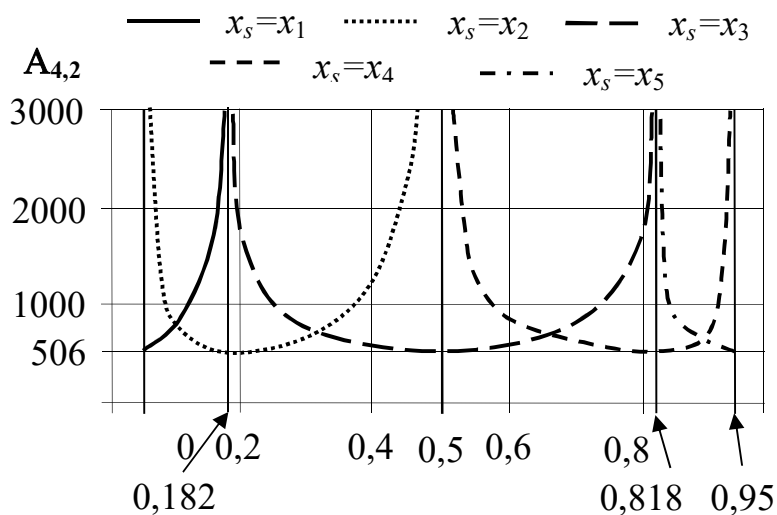


Рис. 2. Безразмерное абсолютное число обусловленности задачи $A_{4,2}$

Fig. 2. Non-dimensional absolute value of the conditionality of the problem $A_{4,2}$

Минимальные значения функций на полученных графиках показывают зависимость погрешности Метода от погрешности датчиков с оптимальными узлами сетки аппроксимации (14) и (16). Графики показывают преимущество координат Чебышёвских экстремумов в сетке аппроксимации в сравнении с другими распределениями коор-

динат, абсолютное число обусловленности задачи и соответственно погрешность решения задачи значительно возрастает при отклонении координат узлов сетки аппроксимации от координат Чебышёвских экстремумов. Отклонение координат до половины текущего шага сетки двукратно увеличивает погрешность определения начальных условий.

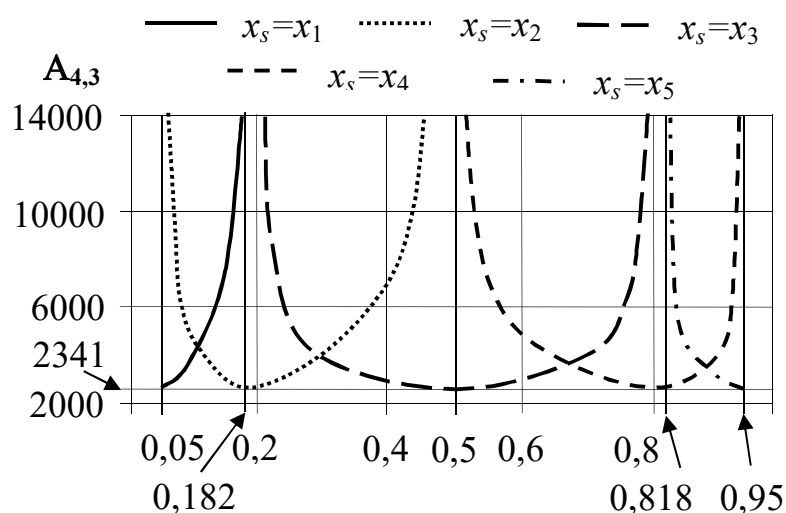


Рис. 3. Безразмерное абсолютное число обусловленности задачи $A_{4,3}$

Fig. 3. Non-dimensional absolute value of the conditionality of the problem $A_{4,3}$

Выводы

1. Разработан экспериментально-расчетный Метод определения начальных условий обратной задачи Коши на основе предложенных характеристик размещения сетки аппроксимации на исследуемом объекте с учетом недоступных для измерения участков, характеристик сетки аппроксимации с координатами Чебышёвских экстремумов для координат узлов, характеристик параметра регуляризации задачи в виде аппроксимационной константы.

2. Исследована реакция Метода на отклонение координат узлов сетки ап-

проксимации от координат Чебышёвских экстремумов – точек чебышёвского альтернанса. Показано, что отклонение координат до половины текущего шага сетки двукратно увеличивает погрешность определения начальных условий.

3. Приведенный Метод может использоваться не только в вычислительной математике, но и в ее технических приложениях, например, для повышения точности методик обследования строительных объектов на стадии экспериментально-теоретических исследований, что является актуальным и полезным.

Список литературы

1. Локтионов А. П. Численное дифференцирование в модели измерений // *Измерительная техника*. 2019. № 8. С. 14-19. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2019-8-14-19>.
2. Локтионов А.П., Максимов Ю.А., Титов В.С. О численном дифференцировании в обратной задаче Коши // *Сварка и родственные технологии в машиностроении и*

электронике: сборник научных тр. Вып. 4. Курск, 2002. С. 263-268. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21788616>. (дата обращения: 20.04.2021).

3. Ahnert K., Abel M. Numerical differentiation of experimental data: local versus global methods // *Computer Physics Communications*. 2007. Vol. 177(10). P. 764-774. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2007.03.009>.

4. Локтионов А. П. *Структурная регуляризация подсистемы преобразовательного компонента преобразовательно-вычислительных систем*. Курск, 2009. 323 с.

5. Stickel J.J. Data smoothing and numerical differentiation by a regularization method // *Computers & Chemical Engineering*. 2010. Vol. 34(4). P. 467-475. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2009.10.007>.

6. Перельмутер А.В. Обратные задачи строительной механики // *Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета*. 2020. Т. 22(4). С. 83-101. <https://doi.org/10.31675/1607-1859-2020-22-4-83-101>.

7. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы*. М.: Лаборатория знаний, 2020.

8. Сирая Т. Н. Методы обработки данных при измерениях и метрологические модели // *Измерительная техника*. 2018. № 1. С. 9-14. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2018-1-9-14>.

9. Jang T.S., Han S.L. Numerical experiments on determination of spatially concentrated time-varying loads on a beam: an iterative regularization method // *The Journal of Mechanical Science and Technology*. 2009. Vol. 23(10). P. 2722-2729. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s12206-009-0735-3/>. (дата обращения 20.04.2021).

10. Danchenko V.I., Kondakova E.N. Chebyshev's alternance in the approximation of constants by simple partial fractions // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2010. Vol. 270(1). P. 80–90. <https://doi.org/10.1134/s0081543810030065>.

11. Копит Т.А., Чуличков А.И., Устинин Д. М. Эмпирическое восстановление нечеткой модели эксперимента и редукция измерений в равномерной метрике // *Вычислительные методы и программирование*. 2011. Т. 12. С. 90-96. URL: http://nummeth.srcc.msu.ru/zhurnal/tom_2011/pdf/v12r111.pdf. (дата обращения 20.04.2021).

12. Cheney E.W., Kincaid D.R. *Numerical Mathematics and Computing*. Belmont. California. USA: Thomson Brooks/Cole; 2013.

13. Chekushkin V.V., Mikheev K.V. Fast search algorithms for the best approximation polynomials for reproduction of functional dependences in data-measurement systems // *Measurement Techniques*. 2016. Vol. 59(4). P. 351-356. <https://doi.org/10.1007/s11018-016-0970-9>.

14. Korytov M.S., Shcherbakov V.S., Shershneva E.O., Breus I.V. Approximation methods for the actual trajectory of load carried by overhead crane to the required one – a comparative analysis // *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. 2016.

Vol. 10(2). P. 45-56. URL: http://www.sscm.kg.ac.rs/jsscm/downloads/Vol10No2/Vol10No2_05.pdf. (дата обращения: 20.04.2021).

15. Loktionov A.P. A measuring system for determination of a cantilever beam support moment // *Smart Structures Systems*. 2017. Vol. 19(4). P. 431-439. <https://doi.org/10.12989/sss.2017.19.4.431>.

16. Verbrugge M.W., Wampler C.W., Baker D.R. Smoothing methods for numerical differentiation to identify electrochemical reactions from open-circuit-potential data // *Journal of The Electrochemical Society*. 2018. Vol. 165(16). P. A4000-A4011. <https://doi.org/10.1149/2.0951816jes>.

17. Кудрявцев К.Я. Алгоритм построения полинома наилучшего равномерного приближения по экспериментальным данным // *Вестник национального исследовательского ядерного университета МИФИ*. 2019. Т. 8(5). С. 480-486. <https://doi.org/10.1134/S2304487X1905002X>.

18. Kalenchuk-Porkhanova A. Best Chebyshev approximation for compression of big information arrays // *Proceedings of the 10th International Scientific and Practical Conference named after A. I. Kitov "Information Technologies and Mathematical Methods in Economics and Management (IT&MM-2020)"*. October 15-16, 2020. Moscow. Russia. P. 1-13. URL: http://sunsite.informatik.rwth-aachen.de/ftp/pub/publications/CEUR-WS/Vol-2830.zip_paper25.pdf. (дата обращения 20.04.2021).

19. Панферов С.В., Панферов В.И. Численная аппроксимация конвективного граничного условия для сеток с подвижными узлами // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Энергетика»*. 2015. Т. 15. № 4. С. 13–18. <https://doi.org/10.14529/power150402>. URL: <https://dspace.susu.ru/xmlui/bitstream/handle/0001.74/7282/2.pdf?sequence=1&isAllowed=>.

20. Loktionov A.P. Improving the polynomial approximation of an object characteristic that is not directly measurable by using measurement reduction // *Measurement Techniques*. 2017. Vol. 59(10). P. 1042-1050. <https://doi.org/10.1007/s11018-017-1089-3>.

21. Yang C. Sensor placement for structural health monitoring using hybrid optimization algorithm based on sensor distribution index and FE grids // *Structural Control and Health Monitoring*. 2018. Vol. 5(6). <https://doi.org/0.1002/stc.2160>.

22. Данилов М.Ф., Савельева А.А. Анализ исходных данных неустойчивых задач координатных измерений геометрических параметров деталей // *Измерительная техника*. 2018. № 6. С. 41-45. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it-2018-6-41-45>.

23. Loktionov A.P. Information measuring system of numerical differentiation for the analysis of elements of mechanical structures // *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. 2018. Vol. 12(2). P. 53-71. <https://doi.org/10.24874/jsscm.2018.12.02.04>.

24. Daili N., Guesmia A. Remez algorithm applied to the best uniform polynomial approximations // *General Mathematics Notes*. 2013. Vol. 17(1). P. 16-31. URL: <http://>

25. Hoang N.S. On node distributions for interpolation and spectral methods // arXiv: 1305.6104v1 [math.NA]. 27 May 2013. 2013. P. 1-18. Cornell University. URL: <https://arxiv.org/abs/1305.6104v1>. (дата обращения 20.04.2021).

26. Ibrahimoglu B.A. Lebesgue functions and Lebesgue constants in polynomial interpolation // *Journal of Inequalities and Applications*. 2016:93. P. 1-15. <https://doi.org/10.1186/s13660-016-1030-3>.

27. Шакиров И.А. Полное исследование функций Лебега, соответствующих классическим интерполяционным полиномам Лагранжа // *Известия вузов. Математика*. Гос. номер статьи по НТИЦ "Информрегистр" 0421100123\0109. 2011. №10. С. 80–88. URL: http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/. (дата обращения 20.04.2021).

28. Байдакова Н.В. Оценка снизу функции Лебега интерполяционного процесса алгебраическими многочленами по равномерным узлам симплекса // *Математические заметки*. 2012. Т. 92. № 1. С. 19-26. <https://doi.org/10.4213/mzm8965>. URL: <http://www.mathnet.ru/links/b65d1e3cffe7d4a08483b370ed70849a/mzm8965.pdf>.

29. Лалин В.В., Беляев М.О. Изгиб геометрически нелинейного консольного стержня. Решение по теориям Кирхгофа и Коссера – Тимошенко // *Инженерно-строительный журнал*. 2015. Т. 53. № 1. С. 39-55. <https://doi.org/10.5862/MCE.53.5>. URL: [https://engstroy.spbstu.ru/userfiles/files/2015/1\(53\)/05.pdf](https://engstroy.spbstu.ru/userfiles/files/2015/1(53)/05.pdf).

30. Tusnina O.A., Danilov A.I. The stiffness of rigid joints of beam with hollow section column // *Magazine of Civil Engineering*. 2016. Vol. 64(4). Pp. 40–51. DOI: 10.5862/MCE.64.4. URL: [https://engstroy.spbstu.ru/userfiles/files/2016/4\(64\)/04.pdf](https://engstroy.spbstu.ru/userfiles/files/2016/4(64)/04.pdf).

31. Tusnina V.M. Semi-rigid steel beam-to-column connections // *Magazine of Civil Engineering*. 2017. Vol. 73(5). Pp. 25-39. DOI: 10.18720/MCE.73.3. URL: [https://engstroy.spbstu.ru/userfiles/files/2017/5\(73\)/03.pdf](https://engstroy.spbstu.ru/userfiles/files/2017/5(73)/03.pdf) (дата обращения 20.04.2021).

32. Кашеварова Г.Г., Тонков Ю.Л., Тонков И.Л. Интеллектуальная автоматизация инженерного обследования строительных объектов // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2017. Vol. 13(3). Pp. 42–57. <https://doi.org/10.22337/1524-5845-2017-13-3-42-57>.

33. A wireless passive sensing system for displacement/strain measurement in reinforced concrete members / B. Ozbey, V.B. Erturk, H.V. Demir, A. Altintas, O.A. Kurc // *Sensors*. 2016. Vol. 16(4). Pp. 1-14. <https://doi.org/10.3390/s16040496>.

34. Building structural health monitoring using dense and sparse topology wireless sensor network / M.E. Haque, M.F.M. Zain, M.A. Hannan, M.H. Rahman // *Smart Structures and Systems*. 2015. Vol. 16(4). Pp. 607-621. <https://doi.org/10.12989/ss.2015.16.4.623>.

References

1. Loktionov A. P. Chislennoe differentsirovanie v modeli izmerenii [Numerical differentiation in the measurement model]. *Izmeritel'naya tekhnika = Measurement Techniques*, 2019, no. 8, pp. 14-19. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2019-8-14-19>.
2. Loktionov A. P., Maksimov Yu.A., Titov V.S. [Numerical differentiation in the inverse Cauchy problem]. *Svarka i rodstvennyye tekhnologii v mashinostroyenii i elektronike. Sbornik nauchnykh tr.* Is. 4. Kursk, 2002, pp. 263-268. (In Russ.). Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21788616>. (accessed 20.04.2021).
3. Ahnert K., Abel M. Numerical differentiation of experimental data: local versus global methods. *Computer Physics Communications*. 2007, vol. 177(10), pp. 764-774. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2007.03.009>.
4. Loktionov A. P. *Strukturnaya regularizatsiya podsistemy preobrazovatel'nogo komponenta preobrazovatel'no-vychislitel'nykh sistem* [Structural regularization of the subsystem of the converting component of converting computing systems]. Kursk, 2009.
5. Stickel J.J. Data smoothing and numerical differentiation by a regularization method. *Computers & Chemical Engineering*, 2010, vol. 34(4), pp. 467-475. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2009.10.007>.
6. Perelmuter A.V. Obratnye zadachi stroitel'noi mekhaniki [Inverse problems of structural mechanics]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta = Vestnik of Tomsk State University of Architecture and Building*. 2020, vol. 22(4), pp. 83-101. <https://doi.org/10.31675/1607-1859-2020-22-4-83-101>.
7. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Chislennyye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Laboratoriya-znaniy Publ., 2020.
8. Siraya T. N. Metody obrabotki dannykh pri izmereniyakh i metrologicheskie modeli [Methods of data processing in measurements and metrological models]. *Izmeritel'naya tekhnika = Measurement Techniques*. 2018, no. 1, pp. 9-14. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2018-1-9-14>.
9. Jang T.S., Han S.L. Numerical experiments on determination of spatially concentrated time-varying loads on a beam: an iterative regularization method. *The Journal of Mechanical Science and Technology*, 2009, no. 23(10), pp. 2722-2729. Available at: <https://link.springer.com/article/10.1007/s12206-009-0735-3>. (accessed 20.04.2021).
10. Danchenko V.I., Kondakova E.N. Chebyshev's alternance in the approximation of constants by simple partial fractions. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2010, no.270(1), pp. 80–90. <https://doi.org/10.1134/s0081543810030065>.
11. Kopit T.A., Chulichkov A.I., Ustinin D. M. Empiricheskoe vosstanovlenie nechetkoi modeli eksperimenta i reduktsiya izmerenii v ravnomernoi metrike [Empirical reconstruction of a fuzzy model and the reduction of measurements in Euclidean metric]. *Vychislitel'nye-metody-i-programmirovaniye = Numerical Methods and Programming*, 2011, vol. 12,

pp. 90-96. Available at: http://num-meth.srcc.msu.ru/zhurnal/tom_2011/pdf/v12r111.pdf. (accessed 20.04.2021).

12. Cheney E.W., Kincaid D.R. *Numerical Mathematics and Computing*. Belmont. California. USA: Thomson Brooks/Cole; 2013.

13. Chekushkin V.V., Mikheev K.V. Fast search algorithms for the best approximation polynomials for reproduction of functional dependences in data-measurement systems. *Measurement Techniques*, 2016, vol. 59(4), pp. 351-356. <https://doi.org/10.1007/s11018-016-0970-9>.

14. Korytov M.S., Shcherbakov V.S., Shershneva E.O., Breus I.V. Approximation methods for the actual trajectory of load carried by overhead crane to the required one – a comparative analysis. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. 2016, vol. 10(2), pp. 45-56. Available at: http://www.sscm.kg.ac.rs/jsscm/downloads/Vol10No2/Vol10No2_05.pdf. (accessed 20.04.2021).

15. Loktionov A.P. A measuring system for determination of a cantilever beam support moment. *Smart Structures Systems*. 2017, vol. 19(4), pp. 431-439. <https://doi.org/10.12989/sss.2017.19.4.431>.

16. Verbrugge M.W., Wampler C.W., Baker D.R. Smoothing methods for numerical differentiation to identify electrochemical reactions from open-circuit-potential data. *Journal of The Electrochemical Society*, 2018, vol. 165(16), pp. A4000-A4011. <https://doi.org/10.1149/2.0951816jes>.

17. Kudryavcev K.Ya. Algoritm postroeniya polinoma nailuchshego ravnomernogo priblizheniya po eksperimental'nym dannym [Algorithm for constructing a polynomial of the best uniform approximation from experimental data]. *Vestnik nacional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta MIFI = Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI"*. 2019, vol. 8(5), pp. 480-486. <https://doi.org/10.1134/S2304487X1905002X>.

18. Kalenchuk-Porkhanova A. Best Chebyshev approximation for compression of big information arrays. *Proceedings of the 10th International Scientific and Practical Conference named after A. I. Kitov "Information Technologies and Mathematical Methods in Economics and Management (IT&MM-2020)"*. October 15-16, 2020, Moscow. Russia. Available at: <http://ceur-ws.org/Vol-2830/paper25.pdf>. (accessed 20.04.2021).

19. Panferov S.V., Panferov V.I. Chislennaya approksimatsiya konvektivnogo granichnogo usloviya dlya setok s podvizhnymi uzlami [Numerical approximation of the convective boundary condition for grids with moving nodes]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta: Seria Energetika = Bulletin of the South Ural State University: Series Power Engineering*, 2015, vol. 15(4), pp. 13–18. <https://doi.org/10.14529/power150402>. Available at: <https://dSPACE.susu.ru/xmlui/bitstream/handle/0001.74/7282/2.pdf?sequence=1&isAllowed=>.

20. Loktionov A.P. Improving the polynomial approximation of an object characteristic that is not directly measurable by using measurement reduction. *Measurement Techniques*. 2017, vol. 59(10), pp. 1042-1050. <https://doi.org/10.1007/s11018-017-1089-3>.

21. Yang C. Sensor placement for structural health monitoring using hybrid optimization algorithm based on sensor distribution index and FE grids. *Structural Control and Health Monitorin*, 2018, vol. 5(6). p.2160. <https://doi.org/10.1002/stc.2160>.

22. Danilov M.F., Savelyeva A.A. Analiz iskhodnykh dannyykh neustoichivyykh zadach koordinatnykh izmerenii geometricheskikh parametrov detalei [Analysis of the initial data of unstable problems of coordinate measurements of geometric parameters of parts]. *Izmeritel'naya texnika = Measurement Techniques*, 2018, no. 6, pp. 41-45. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it-2018-6-41-45>.

23. Loktionov A.P. Information measuring system of numerical differentiation for the analysis of elements of mechanical structures. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*, 2018, vol. 12(2), pp. 53-71. <https://doi.org/10.24874/jsscm.2018.12.02.04>.

24. Daili N., Guesmia A. Remez algorithm applied to the best uniform polynomial approximations. *General Mathematics Notes*, 2013, vol. 17(1), pp. 16-31. Available at: http://emis.impa.br/EMIS/journals/GMN/volumes/vol_17_no_1_july_2013.html. (accessed 20.04.2021).

25. Hoang N.S. On node distributions for interpolation and spectral methods. *ArXiv: 1305.6104v1 [math.NA]*. 27 May 2013, 2013, pp.1-18. Cornell University. Available at: <https://arxiv.org/abs/1305.6104v1>. (accessed 20.04.2021).

26. Ibrahimoglu B.A. Lebesgue functions and Lebesgue constants in polynomial interpolation. *Journal of Inequalities and Applications*, 2016, vol. 93, <https://doi.org/10.1186/s13660-016-1030-3>.

27. Shakirov I.A. Polnoe issledovanie funktsii Lebega, sootvetstvuyushchikh klassicheskim interpolatsionnym polinomam Lagranzha [Complete investigation of Lebesgue functions corresponding to classical Lagrange interpolation polynomials]. *Izvestiya-vuzov-matematika = Russian Mathematics (Iz. VUZ)*. gos-nomer-stati-po-ntts-informregistr-0421100123\0109, 2011, no. 10, pp. 80-88. Available at: <http://www.mathnet.ru/links/fe83b09ef6d61002e4f386c4ad5e6a19/ivm8104.pdf>. (accessed 20.04.2021).

28. Baydakova N.V. Otsenka snizu funktsii Lebega interpolatsionnogo protsessa algebraicheskimi mnogochlenami po ravnomernym uzlam simpleksa [Lower bound for the lebesgue function of an interpolation process with algebraic polynomials on equidistant nodes of a simplex]. *Matematicheskite zametki = Mathematical Notes*, 2012, vol. 92(1), pp. 19-26. <https://doi.org/10.4213/mzm8965>. Available at: <http://www.mathnet.ru/links/b65d1e3cffe7d4a08483b370ed70849a/mzm8965.pdf>.

29. Lalin V.V., Belyayev M.O. Izgib geometricheski nelineinogo konsol'nogo sterzhnya. Reshenie po teoriyam Kirkhgofa i Kossera – Timoshenko [Bending of geometrically nonlin-

ear cantilever beam. Results obtained by Cosserat – Timoshenko and Kirchhoff's rod theories]. *Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal = Magazine of Civil Engineering*, 2015, vol. 53(1), pp. 39-55. <https://doi.org/10.5862/MCE.53.5>. Available at: [https://engstroy.spbstu.ru/userfiles/files/2015/1\(53\)/05.pdf](https://engstroy.spbstu.ru/userfiles/files/2015/1(53)/05.pdf).

30. Tushina O.A., Danilov A.I. The stiffness of rigid joints of beam with hollow section column. *Magazine of Civil Engineering*, 2016, vol. 64(4), pp. 40-51. <https://doi.org/10.5862/MCE.64.4>. Available at: [https://engstroy.spbstu.ru/userfiles/files/2016/4\(64\)/04.pdf](https://engstroy.spbstu.ru/userfiles/files/2016/4(64)/04.pdf).

31. Tushina V.M. Semi-rigid steel beam-to-column connections. *Magazine of Civil Engineering*, 2017, vol. 73(5), pp. 25-39. <https://doi.org/10.18720/MCE.73.3>. Available at: [https://engstroy.spbstu.ru/userfiles/files/2017/5\(73\)/03.pdf](https://engstroy.spbstu.ru/userfiles/files/2017/5(73)/03.pdf).

32. Kashevarova G. G., Tonkov, Y. L., Tonkov I.L. Intel'ktual'naya avtomatizatsiya inzhenernogo obsledovaniya stroitel'nykh ob'ektov [Intellectual automation of engineering survey of building objects. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2017, vol. 13(3), pp. 42-57. <https://doi.org/10.22337/1524-5845-2017-13-3-42-57>.

33. Ozbey B., Erturk V.B., Demir H.V., Altintas A., Kurc O.A. A wireless passive sensing system for displacement/strain measurement in reinforced concrete members. *Sensors*, 2016, vol. 16(4), pp. 1-14. <https://doi.org/10.3390/s16040496>.

34. Haque M.E., Zain M.F.M., Hannan M.A., Rahman M.H. Building structural health monitoring using dense and sparse topology wireless sensor network. *Smart Structures and Systems*, 2015, vol. 16(4), pp. 607-621. <https://doi.org/10.12989/ss.2015.16.4.623>.

Информация об авторе / Information about the Author

Локтионов Аскольд Петрович, доктор технических наук, профессор кафедры электроснабжения, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская Федерация, e-mail: loapa@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1108-4185>, Researcher ID: P-5434-2015

Askold P. Loktionov, Dr. of Sci. (Engineering), Professor of the Department of Power Supply, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: loapa@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1108-4185>, Researcher ID: P-5434-2015