

## К расчету инвариантных многообразий кусочно-гладких отображений

Ж. Т. Жусубалиев<sup>1</sup>✉, В. Г. Рубанов<sup>2</sup>, Ю. А. Гольцов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Юго-Западный государственный университет  
ул. 50 лет Октября 94, г. Курск 305040, Российская Федерация

<sup>2</sup> Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова  
ул. Костюкова 46, г. Белгород 308012, Российская Федерация

✉ e-mail: zhanybai@gmail.com

### Резюме

**Целью исследования** является разработка алгоритма расчета устойчивых инвариантных многообразий седловых периодических орбит кусочно-гладких отображений.

**Метод** базируется на итерировании фундаментальной области вдоль устойчивого подпространства собственных векторов матрицы Якоби, вычисленной в седловой периодической неподвижной точке.

**Результаты.** Разработан метод расчета устойчивых инвариантных многообразий седловых периодических орбит кусочно-гладких отображений. Основным результатом сформулирован в виде утверждения. Основу метода составляет оригинальный подход нахождения обратной функции, идея которого состоит в сведении задачи к нелинейному уравнению первого порядка.

**Заключение.** Описан численный метод расчета устойчивых инвариантных многообразий кусочно-гладких отображений, моделирующих импульсные системы автоматического управления. Метод базируется на итерировании фундаментальной области вдоль устойчивого подпространства собственных векторов матрицы Якоби, вычисленной в седловой периодической неподвижной точке. Основу метода составляет оригинальный подход нахождения обратной функции, который состоит в сведении задачи к решению нелинейного уравнения первого порядка. Такой подход исключает необходимость решения систем нелинейных уравнений для определения обратной функции и преодоления сопутствующих при этом вычислительных проблем. Приведены примеры исследования глобальной динамики кусочно-гладких отображений с мультистабильным поведением.

**Ключевые слова:** кусочно-гладкое отображение; инвариантные многообразия седловой периодической орбиты; гомоклинический контакт; замкнутая инвариантная кривая; «final» бифуркация; бифуркация Неймарка-Сакера; квазипериодические колебания.

**Конфликт интересов:** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Финансирование.** Рубанов В.Г. поддержан грантом: Договор 03/19 от 03.03.2019 г. в рамках Соглашения № 075-11-2019-070 от 29.11.2019 (уникальный номер 07519SU2000000).

**Для цитирования:** Жусубалиев Ж. Т., Рубанов В. Г., Гольцов Ю. А. К расчету инвариантных многообразий кусочно-гладких отображений // Известия Юго-Западного государственного университета. 2020; 24(3): 166-182. <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2020-24-3-166-182>.

Поступила в редакцию 21.05.2020

Подписана в печать 03.06.2020

Опубликована 30.06.2020

© Жусубалиев Ж. Т., Рубанов В. Г., Гольцов Ю. А. , 2020

## Calculation of Invariant Manifolds of Piecewise-Smooth Maps

Zhanybai T. Zhusubaliyev <sup>1</sup> ✉, Vasiliy G. Rubanov <sup>2</sup>, Yuriy A. Gol'tsov <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Southwest State University  
50 Let Oktyabrya str. 94, Kursk 305040, Russian Federation

<sup>1</sup> Belgorod State Technological University  
Kostyukov str. 46, Belgorod 308012, Russian Federation

✉ e-mail: zhanybai@gmail.com

### Abstract

**Purpose of research** is of the work is to develop an algorithm for calculating stable invariant manifolds of saddle periodic orbits of piecewise smooth maps.

**Method** is based on iterating the fundamental domain along a stable subspace of eigenvectors of the Jacobi matrix calculated at a saddle periodic fixed point.

**Results.** A method for calculating stable invariant manifolds of saddle periodic orbits of piecewise smooth maps is developed. The main result is formulated as a statement. The method is based on an original approach to finding the inverse function, the idea of which is to reduce the problem to a nonlinear first-order equation.

**Conclusion.** A numerical method is described for calculating stable invariant manifolds of piecewise smooth maps that simulate impulse automatic control systems. The method is based on iterating the fundamental domain along a stable subspace of eigenvectors of the Jacobi matrix calculated at a saddle periodic fixed point. The method is based on an original approach to finding the inverse function, which consists in reducing the problem to solving a nonlinear first-order equation. This approach eliminates the need to solve systems of nonlinear equations to determine the inverse function and overcome the accompanying computational problems. Examples of studying the global dynamics of piecewise-smooth mappings with multistable behavior are given.

**Keywords:** piecewise smooth map; invariant manifolds of the saddle periodic orbit; homoclinic contact; closed invariant curve; "final" bifurcation; Neimark-Sacker bifurcation; quasiperiodic oscillations.

**Conflict of interest.** The authors declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

**Funding:** Rubanov V.G. supported by the grant: Agreement 03/19 dated 03.03.2019 under the Agreement No. 075-11-2019-070 dated 29.11.2019 (unique number 07519SU2000000).

**For citation:** Zhusubaliyev Zh. T., Rubanov V. G., Gol'tsov Yu. A. Calculation of Invariant Manifolds of Piecewise-Smooth Maps // *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta = Proceedings of the Southwest State University*. 2020; 24(3): 166-182 (In Russ.). <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2020-24-3-166-182>.

Received 21.05.2020

Accepted 03.06.2020

Published 30.06.2020

\*\*\*

### Введение

Как известно, глобальная устойчивость является редким свойством нели-

нейных динамических систем, поскольку из этого свойства вытекает, что существует единственный аттрактор, ко-

торый притягивает все траектории фазового пространства. Однако большинство задач из механики, физики, теории систем автоматического управления, силовой электроники, биологии, экономики и социальных наук приводят к моделям, которые демонстрируют мультистабильное поведение [1-7], когда при одних и тех же параметрах сосуществуют несколько аттракторов.

Особенность мультистабильных систем состоит в их высокой чувствительности к внешним помехам. Даже сколь угодно малые случайные возмущения или вариации параметров могут приводить к непрогнозируемым изменениям динамики, например, к внезапному переходу от одного периодического движения к другому, либо к взрывной хаотизации колебаний.

Для изучения нелинейных явлений в мультистабильных системах требуется найти специальные инвариантные множества, такие как репеллеры, седловые периодические орбиты вместе с их устойчивыми и неустойчивыми многообразиями, играющие ключевую роль в глобальной динамике [8-10]. Устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия нельзя рассчитать ни аналитически, ни с помощью техники линеаризации. Сейчас разработано несколько численных методов расчета устойчивых и неустойчивых инвариантных множеств [11-19].

Стандартный подход состоит в итерации так называемой фундаментальной области (fundamental domain) (см., например, [8, 11]), когда итерируется

локальная область в окрестности седловой периодической орбиты вдоль устойчивого и неустойчивого собственных подпространств. Все эти методы работают одинаково, поскольку устойчивое многообразие вычисляется как неустойчивое многообразие обратной функции, полученной явно, или численно, например, методом Ньютона.

Н. Osinga и др. [14] предложили численный метод расчета устойчивых одномерных инвариантных многообразий двумерных отображений, не требующий определения обратной функции или ее аппроксимации. Это так называемый «Search Circle (SC)» алгоритм [14]. Такой подход особенно важен в тех случаях, когда нельзя получить отображение Пуанкаре аналитически для заданного векторного поля. Можно его использовать и в случае, когда отображение необратимо. Метод реализован в виде прикладной программы в пакете DsTool и в настоящее время является одним из эффективных в своем классе.

Мы предлагаем численный алгоритм расчета устойчивого инвариантного многообразия седловых периодических орбит семейства кусочно-гладких отображений, моделирующих импульсные системы автоматического управления и устройства силовой электроники. Основу алгоритма составляет оригинальный метод построения обратной функции, исключающий необходимость численного решения систем нелинейных уравнений и преодоления сопутствующих при этом вычислительных проблем.

Для тестирования и исследования нашего метода мы использовали программу, где реализован «Search Circle (SC)» алгоритм. Программа была любезно предоставлена проф. Н. М. Osinga.

### Материалы и методы

Рассмотрим семейство отображений  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

$$F: (x, y) \mapsto F(x, y),$$

$$F(x, y) = \begin{cases} F_L(x, y), & (x, y) \in D_L, \\ F_M(x, y), & (x, y) \in D_M, \\ F_R(x, y), & (x, y) \in D_R. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $F(x, y)$  кусочно-гладкая вектор-функция.

Не ограничивая общности, будем рассматривать конкретное кусочно-гладкое отображение, относящееся к (1), в котором

$$F_L(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha(x-1)+1 \\ \beta(y-1)+1 \end{pmatrix};$$

$$F_M(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \beta y \end{pmatrix};$$

$$F_R(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha(x-1)+\alpha^{1-z} \\ \beta(y-1)+\beta^{1-z} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где

$$z = \frac{\Gamma}{q}(x - \vartheta y) + \Gamma \Leftrightarrow q + x - \vartheta y - \frac{q}{\Gamma}z = 0.$$

Здесь  $\alpha, \beta, \vartheta, \Gamma, q$  – параметры.

Каждая из  $F_L(x, y)$ ,  $F_M(x, y)$  и  $F_R(x, y)$  – функция класса  $C^1$  и монотонна во всей своей области определения:

$$D_L = \left\{ (x, y) : \vartheta y - x < \frac{\Gamma-1}{\Gamma} \cdot q \right\},$$

$$D_M = \left\{ (x, y) : \frac{\Gamma-1}{\Gamma} \cdot q \leq \vartheta y - x \leq q \right\},$$

$$D_R = \left\{ (x, y) : \vartheta y - x > q \right\}.$$

Границы  $D_L, D_M, D_R$  – это точки  $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ , где производные первого порядка  $F(x, y)$  по  $(x, y)$  не существуют. Границу между областями определения  $F_L, F_R, F_M$  называют «border». Здесь  $D = D_L \cup D_M \cup D_R$ .

Отображение (1), (2) было введено в [20] для исследования бифуркаций замкнутых инвариантных кривых и с тех пор оно изучалось многими авторами (см., например, [21]). К этому же классу относятся отображения, рассмотренные в [22, 23, 24].

Описание нашего метода начнем с нескольких предварительных замечаний и определений.

- Рассмотрим отображение

$$F: \mathbf{x} \mapsto F(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

где  $F$  – гладкая функция класса  $C^1$ . Там, где это необходимо, будем записывать (3) в эквивалентной форме

$$F: \mathbf{x}' \mapsto F(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}', \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь  $\mathbf{x}'$  называется образом точки  $\mathbf{x}$  первого ранга. Любая точка  $\mathbf{x}$ , такая что  $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'$  называется прообразом  $\mathbf{x}'$  ранга один. Образы и прообразы ранга- $k$  обозначают  $F^k(\mathbf{x})$  и  $F^k(\mathbf{x})$ , соответственно. Здесь  $\underbrace{F^k(\mathbf{x}) = F(F(\dots F(\mathbf{x})\dots))}_k$ .

- Определение 1. Точка  $\mathbf{x}_0$  называется неподвижной, если  $F(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0 = 0$ .

• Определение 2 [8]. Пусть  $A$  – матрица Якоби, вычисленная в  $x_0$ . Собственные числа  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  матрицы  $A$  называются *мультипликаторами* неподвижной точки.

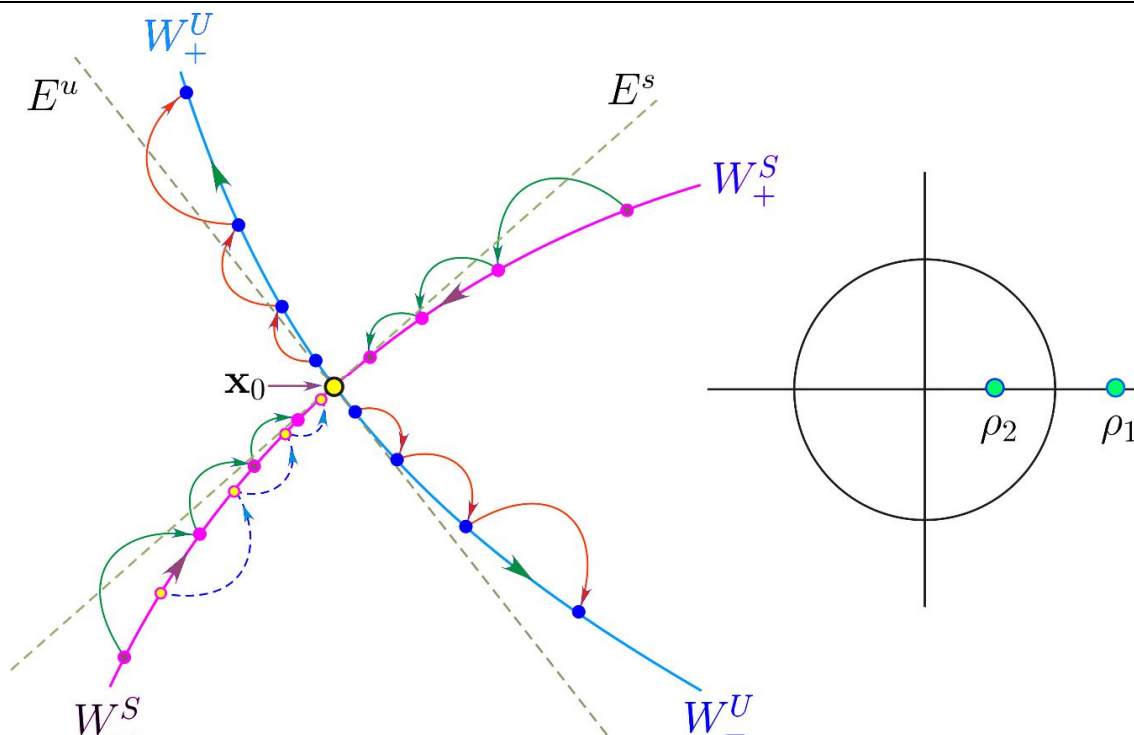
Пусть  $n_-, n_0$  и  $n_+, n_0 + n_- + n_+ = n$  – число мультипликаторов, лежащих внутри, на границе и вне единичного круга  $\{\rho \in \mathbb{C}^1 : |\rho| = 1\}$ , соответственно. Неподвижная точка называется *гиперболической*, если  $n_0 = 0$ , т.е. если нет мультипликаторов, лежащих на границе единичного круга. Неподвижная точка устойчива, если все мультипликаторы лежат внутри единичного круга, т.е.  $|\rho_i| < 1, i = \overline{1, n}$ . Гиперболическая неподвижная точка называется гиперболическим седлом, если  $n_- n_+ \neq 0$ . Заметим, что для периодических орбит с периодом  $m$  аналогичным образом можно определить свойство гиперболичности, сводя задачу к случаю неподвижной точки отображения  $F^m(x_0)$ .

• Теорема о локальном устойчивом многообразии [8]. Пусть  $x_0$  гиперболическая неподвижная точка с  $n_0 = 0, n_- + n_+ = n$ . Тогда пересечения  $W^s(x_0)$  и  $W^u(x_0)$  с достаточно малой окрестностью  $x_0$  содержат гладкие локальные многообразия  $W_{loc}^s(x_0)$  и  $W_{loc}^u(x_0)$  размерности  $n_-$  и  $n_+$  соответственно. Более того,  $W_{loc}^s(x_0)$  и  $W_{loc}^u(x_0)$  касаются в неподвижной точке  $x_0$  подпространств собственных векторов  $E^s$  и  $E^u$  матрицы  $A$ . Здесь  $E^s$  и  $E^u$  – устойчивое и неустойчивое подпро-

странства собственных векторов, для которых, соответственно, мультипликаторы  $|\rho| < 1$  и  $|\rho| > 1$ .

На рис. 1 показан пример инвариантных многообразий на  $\mathbb{R}^2$  для положительных  $0 < \rho_2 < 1.0$  и  $\rho_1 > 1.0$ . В этом случае существуют два одномерных инвариантных многообразия, проходящие через неподвижную точку  $x_0$ , а именно, одномерное устойчивое многообразие  $W^s(x_0)$ , образованные орбитами, сходящимися к неподвижной точке  $x_0$  при итерации  $F$  и одномерное неустойчивое многообразие  $W^u(x_0)$ , образованные орбитами, сходящимися к  $x_0$  при итерации  $F^{-1}$ .

Прежде чем продолжить изложение, сделаем несколько важных замечаний [8]. Во-первых, орбита дискретной системы – это последовательность точек. Все орбиты, не лежащие на инвариантных многообразиях, проходят через окрестность  $x_0$  и, в конечном итоге, покидают эту окрестность. Во-вторых, инвариантные кривые не являются орбитами, в действительности это бесконечное множество орбит. В третьих, как можно видеть из рис. 1, многообразия  $W^{s/u}(x_0)$  состоят из двух ветвей  $W^{s/u}_{\pm}(x_0)$ , разделенных  $x_0$ . Если мультипликаторы отрицательные –  $-1.0 < \rho_2 < 0.0$  и  $\rho_1 < -1.0$ , то орбиты на многообразиях «прыгают» между ветками  $W^{s/u}_{-}(x_0)$  и  $W^{s/u}_{+}(x_0)$ . В этом случае многообразия  $W^{s/u}_{\pm}(x_0)$  инвариантны для второй итерации  $F^2$  отображения [8].



**Рис. 1.** Инвариантные многообразия на  $\mathbb{R}^2$  для положительных  $\rho_1$  и  $\rho_2$

**Fig. 1.** Invariant manifolds in  $\mathbb{R}^2$  for positive  $\rho_1$  and  $\rho_2$

• Для необратимых или кусочно-гладких отображений теорема не может быть применена напрямую. Поэтому потребуем, чтобы  $F$  в (1) была дифференцируемой в неподвижной точке  $x_0 = (x_0, y_0)$ . Это условие обеспечивает существование малой окрестности  $U$  точки  $x_0$ , где  $F$  является диффеоморфизмом. Следовательно, теорема гарантирует существование в  $U$  локального устойчивого  $W_{\text{loc}}^s(x_0) \subset U$  и неустойчивого  $W_{\text{loc}}^u(x_0) \subset U$  многообразий:

$$W_{\text{loc}}^s(x_0) = \{x \in U : F^k(x) \rightarrow x_0, \quad k \rightarrow \infty\},$$

$$W_{\text{loc}}^u(x_0) = \{x \in U : F^{-k}(x) \rightarrow x_0, \quad k \rightarrow \infty\}.$$

• Тогда глобальные устойчивые и неустойчивые многообразия определяются как объединение обратных и прямых итераций  $W_{\text{loc}}^s(x_0)$  и  $W_{\text{loc}}^u(x_0)$ :

$$W^s(x_0) = \bigcup_{k=1}^{\infty} F^{-k}(W_{\text{loc}}^s(x_0));$$

$$W^u(x_0) = \bigcup_{k=1}^{\infty} F^k(W_{\text{loc}}^u(x_0)). \quad (4)$$

Так как  $F_L$  и  $F_R$  – линейные функции, то  $F_L^{-1}$  и  $F_R^{-1}$  находятся без труда. Остается найти  $F_M^{-1}$ .

Основной наш результат формулируется в виде следующего утверждения.

• Утверждение. Пусть

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha(x-1) + \alpha^{1-z} \\ \beta(y-1) + \beta^{1-z} \end{pmatrix},$$

$$q + x - \beta y - \frac{q}{\Gamma} z = 0. \quad (5)$$

Тогда существует

$$F_M^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} x'/\alpha - \alpha^{-z} + 1 \\ y'/\beta - \beta^{-z} + 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$q+1-\vartheta y+\frac{x'}{\alpha}-\frac{\vartheta y'}{\beta}-\frac{1}{\alpha^z}+\frac{\vartheta}{\beta^z}-\frac{q}{\Gamma}z=0, (7)$$

такая, что  $F_M$  и  $F_M^{-1}$  взаимно обратные монотонные функции.

• Доказательство.

Запишем  $F_M: (x, y) \mapsto F_M(x, y)$  в эквивалентном виде

$$x' = \alpha(x-1) + \alpha^{1-z}; \quad y' = \beta(y-1) + \beta^{1-z}, \quad (8)$$

$$q+x-\vartheta y-\frac{q}{\Gamma}z=0.$$

Компоненты вектор-функции (6) получаются из первых двух уравнений (8):

$$x = x'/\alpha - \alpha^{-z} + 1; \quad y = y'/\beta - \beta^{-z} + 1. \quad (9)$$

Для того чтобы получить (7), подставим выражения (9) в третье уравнение (8):

$$q+1-\vartheta+\frac{x'}{\alpha}-\frac{\vartheta y'}{\beta}-\frac{1}{\alpha^z}+\frac{\vartheta}{\beta^z}-\frac{q}{\Gamma}z=0. (10)$$

Проделав то же самое с (9) и (10), получим (5) и (8). Монотонность  $F_M^{-1}$  следует из монотонности  $F_M$ . Непосредственно из (1) и (2) легко доказать, что  $F_M^{-1}$  определена в

$$D_M^* = \left\{ (x', y') : q+1-\vartheta+\frac{1}{\alpha}-\frac{\vartheta}{\beta}-\frac{q}{\Gamma} \leq \frac{\vartheta y'}{\beta}-\frac{x'}{\alpha} \leq q \right\},$$

а области определений  $F_L^{-1}$  и  $F_R^{-1}$ :

$$D_L^* = \left\{ (x', y') : \frac{\vartheta y'}{\beta}-\frac{x'}{\alpha} < q+1-\vartheta+\frac{1}{\alpha}-\frac{\vartheta}{\beta}-\frac{q}{\Gamma} \right\},$$

$$D_R^* = \left\{ (x', y') : \frac{\vartheta y'}{\beta}-\frac{x'}{\alpha} > q \right\}.$$

Таким образом, для любой точки  $(x, y) \in D_M$  обратная итерация  $F_M$  выполняется в два шага: сначала по  $(x', y')$  вычисляется  $z$  ( $0 < z < 1.0$ ), численно решив уравнение (10). Полученное  $z$  подставляется в (6).

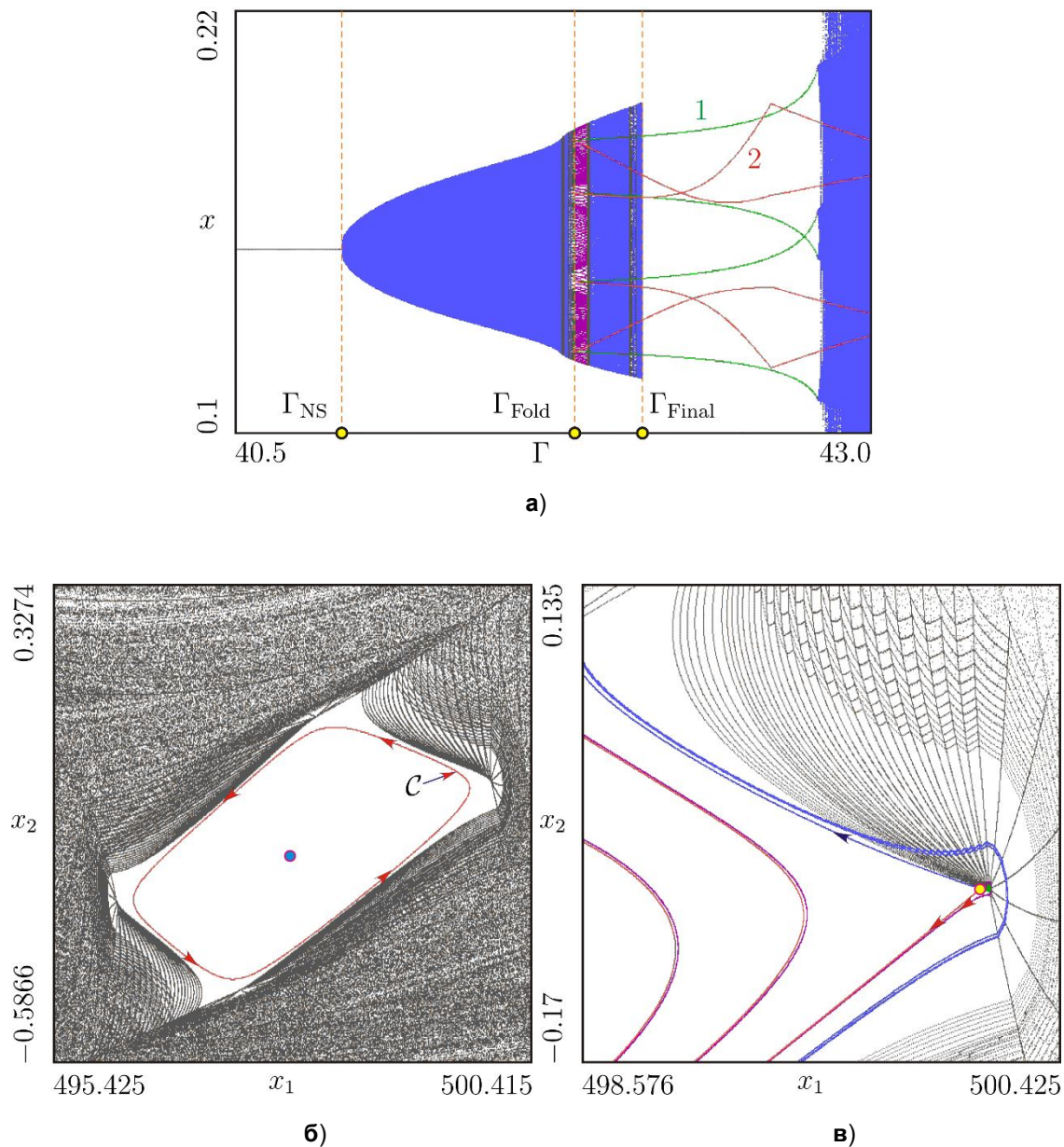
Как показали исследования, такой подход, для рассматриваемого класса моделей по эффективности эквивалентен «Search Circle (SC)» алгоритму.

## Результаты и их обсуждение

Проиллюстрируем работу алгоритма на примере отображения (1) - (2). Отображение (1) - (2) является одним из базовых моделей для исследования двухчастотных колебаний в кусочно-гладких динамических системах с мультистабильным поведением. Двухчастотные режимы широко распространены в природе и технике. Такие колебания характеризуются двумя независимыми частотами. В фазовом пространстве динамической системы (1) - (2) двухчастотным колебаниям отвечает аттрактор в форме замкнутой инвариантной кривой. Характер движения на инвариантной кривой определяется числом вращения, которое представляет собой отношение частот. Когда оно иррационально, инвариантная кривая плотно заполняется траекториями и динамика квазипериодична.

При рациональном числе вращения на замкнутой кривой лежит пара периодических орбит: устойчивая и седловая, а сама инвариантная кривая образована неустойчивыми многообразиями седловой орбиты. Это относится к случаю захвата частот, когда происходит синхронизация колебаний с двумя независимыми частотами в одно периодическое колебание с общим периодом. Причем отношение частот постоянно и рационально на интервале значений параметров [8].





**Рис. 2.** Возникновение квазипериодических колебаний: **а** – бифуркационная диаграмма; **б** – фазовый портрет квазипериодического аттрактора,  $\Gamma = 41.7$ ; **в** – фазовый портрет вблизи точки  $\Gamma_{\text{Fold}}$  «border collision fold» бифуркации,  $\alpha = 41.83216$

**Fig. 2.** Appearance of quasiperiodic oscillations: **a** – bifurcation diagram; **б** – phase portrait for the quasiperiodic attractor,  $\Gamma = 41.7$ ; **в** – phase portrait near the border collision fold bifurcation point  $\Gamma_{\text{Fold}}$ ,  $\alpha = 41.83216$

В качестве первого примера рассмотрим отображение, в котором  $F_L$ ,  $F_M$  и  $F_R$  имеют вид (2). Отображение является дискретной математической моделью импульсной системы автоматического управления температурным полем нагревательной установки.

Исследования проводились при следующих значениях параметров,  $\alpha = 0.969233234448$ ,  $\beta = 0.99687987773$ ,  $\vartheta = 10.0$ ,  $q = 1.5697879251$ . В качестве варьируемого был выбран  $\Gamma$ .

Для наглядности фазовые портреты приводятся в исходных переменных



$$x_1 = 2860.055 \cdot \frac{x - 9y}{1 - 9}, \quad x_2 = -89.3767(x - y).$$

Здесь  $x_1$  – температура нагревательной установки,  $x_2$  – производная  $x_1$  по времени  $t$ . На рис. 2 приведены результаты бифуркационного анализа, выполненные  $40.05 < \Gamma < 43.0$ . На рис. 2,а изображена бифуркационная диаграмма. При увеличении  $\Gamma$  неподвижная точка теряет устойчивость в точке  $\Gamma_{NS}$  и мягко возникают квазипериодические колебания через суперкритическую бифуркацию Неймарка – Сакера. Как показано на рис. 2,б, в фазовом пространстве отображения (1) – (2) таким колебаниям отвечает замкнутая инвариантная кривая  $S$ .

При дальнейшем изменении параметра в точке  $\Gamma_{Fold}$  возникают устойчивый и седловой циклы периода 4 через «border-collision fold» бифуркацию. Это аналог седло-узловой бифуркации в гладких системах.

Заметим, что «border-collision» – это специальный тип бифуркаций, когда инвариантное множество, например, неподвижная точка, сталкивается с границей («border»), разделяющей области определения двух функций:  $F_L$ ,  $F_M$  или  $F_R$ ,  $F_M$ .

На рис. 2,в показан увеличенный фрагмент фазового портрета, рассчитанного вблизи точки  $\Gamma_{Fold}$ . Как можно видеть из этого рисунка, устойчивый 4-цикл сосуществует с хаотическим аттрактором.

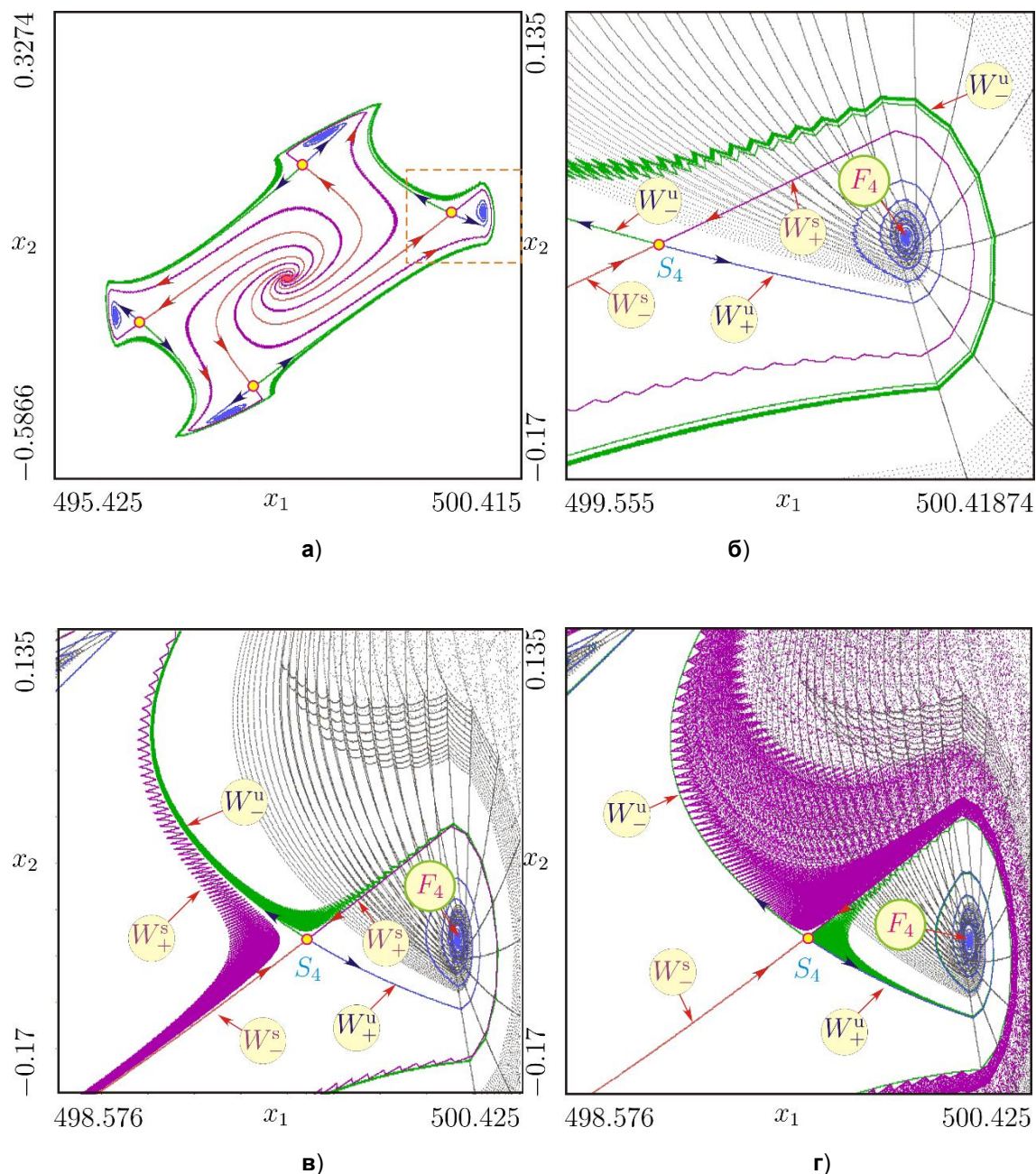
Заметим, что хаотический аттрактор возникает через разрушение замкнутой инвариантной кривой. Как известно, разрушению инвариантной кривой всегда предшествуют резонансные явления. На рис. 2,а хорошо видны многочисленные окна с периодической динамикой, отвечающие резонансам на инвариантной кривой. Механизмы разрушения инвариантных кривых и переходы к хаосу в кусочно-гладких системах до некоторой степени подробно изучены авторами работ [25, 26]. Поэтому мы не будем останавливаться на этом, а отсылаем читателя к публикациям [25, 26] (см. также цитируемую там литературу).

Для большей наглядности, на рис. 3,а,б изображен фазовый портрет для  $\Gamma = 42.0$ , иллюстрирующий сосуществование хаотического аттрактора с устойчивым 4-циклом. Границей бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов являются устойчивые многообразия  $W_{\pm}^s$  седлового 4-цикла.

Фазовые портреты на рис. 3,в,г демонстрируют так называемую «final» бифуркацию («boundary crises»). В точке  $\Gamma_{Final}$  происходит контакт (аналог касания в гладких отображениях) между устойчивым  $W_{\pm}^s$  и неустойчивым  $W_{\pm}^u$  многообразиями седлового 4-цикла в точках негрубой гомоклинической орбиты. В результате этого хаотический аттрактор разрушается и исчезает, становясь хаотическим репеллером.

Как показано на бифуркационной диаграмме (рис. 2,а), после «final» бифуркации остается только один аттрактор – устойчивый 4-цикл. На бифурка-

ционной диаграмме ветка, обозначенная цифрой 1, отвечает устойчивому 4-циклу, а цифрой 2 – седловому 4-циклу.



**Рис. 3.** «Final» бифуркация: **а, б** – сосуществование хаотического аттрактора с устойчивым 4 – циклом,  $\Gamma = 42.0$ ; **в, г** – фазовые портреты, иллюстрирующие «boundary crises» в окрестности точки  $\Gamma_H$ , где **в** – первый гомоклинический контакт,  $\Gamma = 42.1035$ ; **г** – второй гомоклинический контакт,  $\Gamma = 42.129$

**Fig. 3.** “Final” bifurcation: **а, б** – coexistence of a chaotic attractor with a stable 4-cycle,  $\Gamma = 42.0$ ; **в, г** – phase portraits illustration a boundary crises in the neighborhood of the point  $\Gamma_H$ , where **в** – shows the first homoclinic contact,  $\Gamma = 42.103$ , and **г** – illustrates the second homoclinic contact,  $\Gamma = 42.129$

Однако в действительности, при таком переходе возникает кусочно-гладкое притягивающее множество, образованное неустойчивыми многообразия седлового 4-цикла и периодическими точками  $S_4$  и  $F_4$ . Как можно видеть на рис. 3(а) и 3(б), инвариантные многообразия  $W_{\pm}^s, W_{\pm}^u$  – кусочно-гладкие множества, имеющие «изломы» в точках их пересечения с «borders». Однако как на устойчивом  $W_{\pm}^s$ , так и на неустойчивом  $W_{\pm}^u$  многообразиях существуют изломы, которые не являются точками пересечения с «borders». Такие точки – это образы и прообразы точек пересечения  $W_{\pm}^s, W_{\pm}^u$  с «borders», соответственно. На рис. 2 и 3 образы «borders» обозначены серым цветом.

В качестве второго примера возьмем отображение класса (1), где

$$F_L(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha(x - 1 + \theta_1) - \theta_1 + 1 \\ \beta(y - 1 + \theta_2) - \theta_2 + 1 \end{pmatrix};$$

$$F_R(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha(x + \theta_1) - \theta_1 \\ \beta(y + \theta_2) - \theta_2 \end{pmatrix};$$

$$F_M(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha(x - 1 + \theta_1) - \theta_1 + \alpha^{1-z} \\ \beta(y - 1 + \theta_2) - \theta_2 + \beta^{1-z} \end{pmatrix};$$

$$z = \frac{\Gamma}{q}(\vartheta y - x) + \Gamma.$$

Области определения функций  $F_L, F_M$  и  $F_R$ :

$$D_L = \left\{ (x, y) : x - \vartheta y < \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \cdot q \right\},$$

$$D_M = \left\{ (x, y) : \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \cdot q \leq x - \vartheta y \leq q \right\},$$

$$D_R = \left\{ (x, y) : x - \vartheta y > q \right\}.$$

Отображение описывает поведение системы импульсного управления элект-

троприводом мобильных роботов. Параметры:

$$\alpha = 0.85608833963, \quad \beta = 0.42972135484, \\ \theta_1 = 0.16543088193, \quad \theta_2 = 0.030433786677, \\ \vartheta = 0.1839667801, \quad q = 0.062136687407.$$

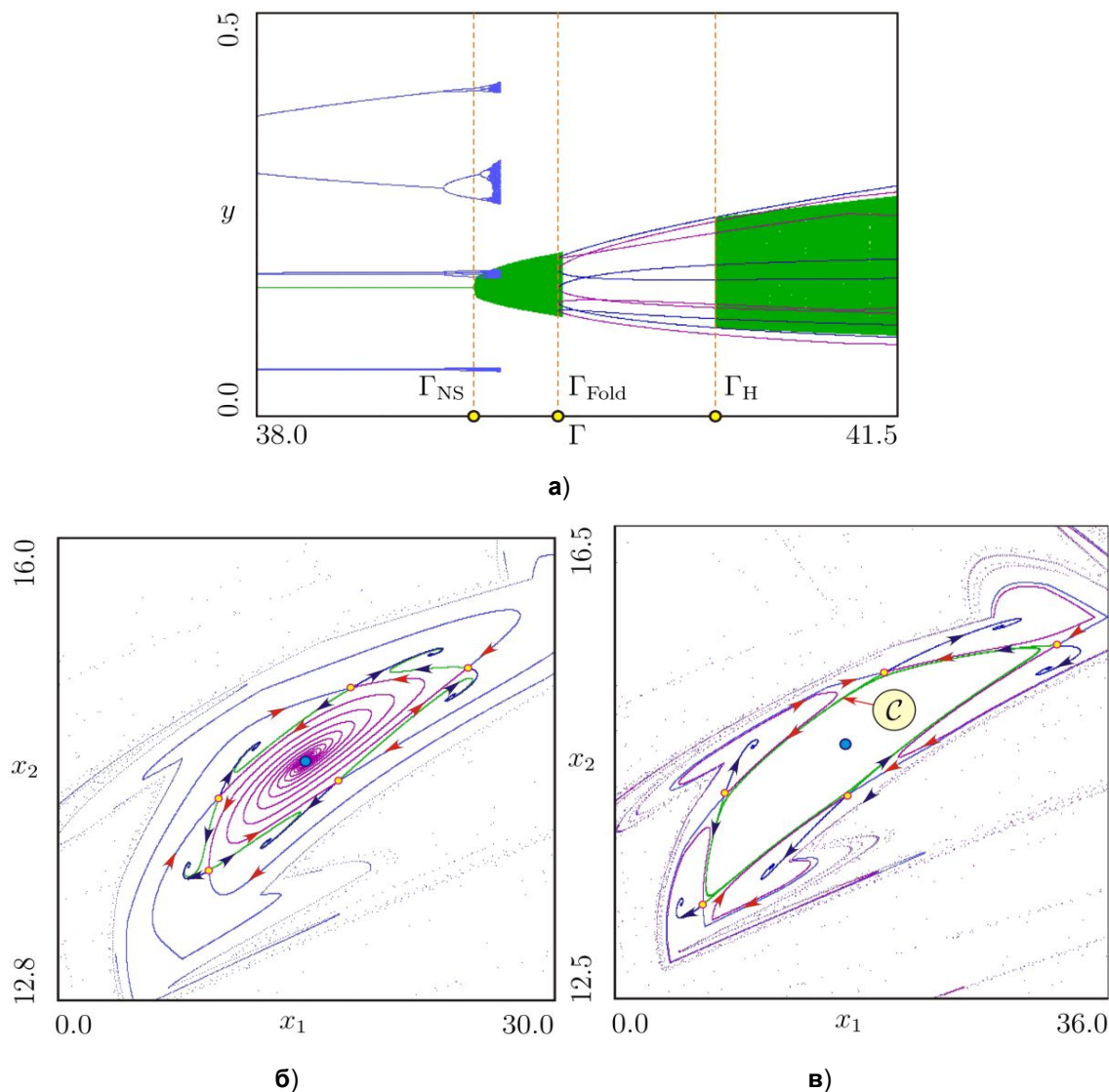
Безразмерные переменные  $x, y$  связаны с размерными величинами  $x_1$  и  $x_2$ :

$$x_1 = 204.62891695(y - x);$$

$$x_2 = 253.04326794x - 46.551555229y.$$

Здесь  $x_1$  и  $x_2$  – ток якоря и угловая скорость вращения якоря двигателя, соответственно.

На рис. 4,а приведена однопараметрическая бифуркационная диаграмма, рассчитанная в диапазоне изменения  $38.0 < \Gamma < 41.5$ . Бифуркационная диаграмма содержит две ветви. Одна ветвь начинается с устойчивого 5-цикла, который возникает в области  $\Gamma < 38.0$  в паре седловым 5-циклом через «border-collision fold» бифуркацию. При увеличении  $\Gamma$  наблюдается классический каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся переходом к хаосу. При дальнейшем увеличении параметра хаотический аттрактор исчезает через «final» бифуркацию, становясь хаотическим репеллером. В точке области  $\Gamma_{NS}$  возникает замкнутая инвариантная кривая из теряющей устойчивость неподвижной точки через бифуркацию Неймарка-Сакера. В точке  $\Gamma_{Fold}$  на бифуркационной диаграмме рождается пара 5-циклов через седло-узловую бифуркацию. При дальнейшем увеличении  $\Gamma$  происходит захват (резонанс), когда орбита на замкнутой инвариантной кривой становится периодической.



**Рис. 4.** Рождение замкнутой инвариантной кривой: **а** – бифуркационная диаграмма; **б** – фазовый портрет резонансной замкнутой инвариантной кривой,  $\Gamma = 40.0$ ; **в** – фазовый портрет для  $\Gamma = 41.0$ , где инвариантная кривая орбитой  $C$  с квазипериодической орбитой сосуществует с устойчивым 5-циклом

**Fig. 4.** The birth of a closed invariant curve: **a** – bifurcation diagram; **б** – phase portrait of the resonant closed invariant curve,  $\Gamma = 40.0$ ; **в** – phase portrait for  $\Gamma = 41.0$ , where an invariant curve with an orbit  $C$  with a quasiperiodic orbit coexists with a stable 5-cycle

В результате этого возникает инвариантная кривая с резонансной структурой, образованная неустойчивыми многообразиями седлового 5-цикла (рис. 4,б).

При переходе через точку  $\Gamma_H$  траектории на инвариантной кривой становятся квазипериодическими. В области  $\Gamma > \Gamma_H$  инвариантная кривая  $C$  с квазипе-

риодической орбитой сосуществует с устойчивым 5-циклом. Границей бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов являются устойчивые многообразия седлового 5-цикла (рис. 4,в).

Цель представленной статьи заставляет нас ограничиться краткой информацией о бифуркациях хаотических ат-

тракторов и свойствах глобальных инвариантных многообразий. За подробностями отсылаем к [8, 14, 27].

## Выводы

Описан численный метод расчета устойчивых инвариантных многообразий кусочно-гладких отображений, моделирующих импульсные системы автоматического управления. Метод базируется на итерировании фундаментальной области вдоль устойчивого подпространства собственных векторов матрицы Якоби, вычисленной в седловой неподвижной точке.

Основу метода составляет оригинальный подход нахождения обратной функции, сущность которого состоит в сведении задачи к решению нелинейного уравнения первого порядка. Такой подход исключает необходимость численного решения систем нелинейных уравнений и преодоления сопутствующих при этом вычислительных проблем.

Приведены примеры исследования глобальной динамики кусочно-гладких отображений с мультистабильным поведением.

## Список литературы

1. Feudel U. Complex dynamics in multistable systems // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2008; 18(6): 1607–1626. <https://doi.org/10.1142/S0218127408021233>
2. Feudel U., Pisarchik A., Showalter K. Multistability and tipping: From mathematics and physics to climate and brain – Minireview and preface to the focus issue // *Chaos*. 2018. №28(3). 033501 p. <https://doi.org/10.1063/1.5027718>
3. Pisarchik A., Feudel, U. Control of multistability // *Phys. Rep.* 2014. №540(4). P. 167–218. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2014.02.007>
4. Hens C., Dana S., Feudel U. Extreme multistability: Attractor manipulation and robustness // *Chaos*. 2015. № 25(10). P. 053112. <https://doi.org/10.1063/1.4921351>
5. Prengel F., Wacker A., Schöoll E. Simple model for multistability and domain formation in semiconductor superlattices // *Phys. Rev.* 1994. № 50. P. 1705–1712. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.50.1705>
6. Liu Y., Chavez J. P. Controlling coexisting attractors of an impacting system via linear augmentation // *Physica D*. 2017. № 348. P. 1–11. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2017.02.018>
7. Marmillot P., Kaufman M., Hervagault J-F. Multiple steady states and dissipative structures in a circular and linear array of three cells: Numerical and experimental approaches // *J. Chem. Phys.* 1991. № 95(2). P. 1206–1214. <https://doi.org/10.1063/1.461151>
8. Kuznetsov Y. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 3rd edition. Springer-Verlag, 2004. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3978-7>
9. *Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Noninvertible Maps* / C. Mira, L. Gardini, A. Barugola, J.C. Cathala // World Scientific Publishing, Singapore. 1996. 632 p. <https://doi.org/10.1142/2252>

10. On some properties of invariant sets of two-dimensional noninvertible maps / C. E. Frouzakis, L. Gardini, I. G. Kevrekidis, G. Millerioux, C. Mira // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 1997. № 7(06). P. 1167–1194. <https://doi.org/10.1142/S0218127497000613>
11. Parker T. S., Chua L. O. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer-Verlag, New York, 1989. <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-3486-9>
12. Nusse H. E., Yorke J. A. A procedure for finding numerical trajectories in chaotic saddles // *Physica D*. 1989. № 36(1-2). P. 137–156. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(89\)90253-4](https://doi.org/10.1016/0167-2789(89)90253-4)
13. You Z., Kostelich E. J., Yorke J. A. Calculating stable and unstable manifolds // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 1991. № 01(03). P. 605–623. <https://doi.org/10.1142/S0218127491000440>
14. England J.P., Krauskopf B., Osinga H.M. Computing one-dimensional stable manifolds and stable sets of planar maps without the inverse // *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2004. №3(2). P. 161–190. <https://doi.org/10.1137/030600131>
15. A survey of methods for computing (un)stable manifolds of vector fields / B. Krauskopf, H.M. Osinga, E.J. Doedel, M.E. Henderson, J. Guckenheimer, A. Vladimirovsky, M. Dellnitz, O. Junge // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2005. № 15(03). P. 763–791. <https://doi.org/10.1142/S0218127405012533>
16. Funderinger D. Toward the calculation of higher-dimensional stable manifolds and stable sets for noninvertible and piecewise-smooth maps // *J. Nonlinear Sci.* 2008. № 18. P. 391–413. <https://doi.org/10.1007/s00332-007-9016-4>
17. Li H., Fan Y., Zhang J. A new algorithm for computing one-dimensional stable and unstable manifolds of maps // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. Vol. 2012. № 22(01). P. 1250018. <https://doi.org/10.1142/S0218127412500186>
18. Invariant manifolds and global bifurcations / J. Guckenheimer, B. Krauskopf, H. M. Osinga, B. B. Sandstede // *Chaos*. 2015. № 25(9). P. 097604. <https://doi.org/10.1063/1.4915528>
19. Yue X-L., Xu Y., Xu W., Sun J-Q. Global Invariant manifolds of dynamical systems with the compatible cell mapping method // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2019. № 29(8). P. 1950105. <https://doi.org/10.1142/S0218127419501050>
20. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. Equilibrium-torus bifurcation in nonsmooth systems // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2008. № 237(7). P. 930-936. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2007.11.019>
21. Simpson D.J.W. The structure of mode-locking regions of piecewise-linear continuous maps: I. Nearby mode-locking regions and shrinking points // *Nonlinearity*. 2016. № 30(1). P. 382–444. <https://doi.org/10.1088/1361-6544/aa4f49>
22. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. *Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems*. World Scientific, Singapore, 2003.



23. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. Direct transition from a stable equilibrium to quasiperiodicity in non-smooth systems // *Physics Letters A*. 2008. № 372(13). P. 2237–2246. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.08.077>
24. Baushev V. S., Zhusubaliyev Zh. T. Indeterminable states of a voltage regulator with pulse-width control // *Elect. Techn.* 1992. № 3. P. 85-98.
25. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., De S., Banerjee S. Transitions from phase-locked dynamics to chaos in a piecewise-linear map // *Physical Review E*. 2008. № 77. P. 026206. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.77.026206>
26. De S., Dutta P.S., Banerjee S. Torus destruction in a nonsmooth noninvertible map // *Physics Letters A*. 2012. № 376. P. 400-406. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2011.11.017>
27. Avrutin V., Zhusubaliyev Zh. T. Nested closed invariant curves in piecewise smooth maps // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2019. № 29(7). P. 1930017. <https://doi.org/10.1142/S0218127419300179>

### References

1. Feudel U. Complex dynamics in multistable systems. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2008, no. 18(6), pp. 1607–1626. <https://doi.org/10.1142/S0218127408021233>
2. Feudel U., Pisarchik A., Showalter K. Multistability and tipping: From mathematics and physics to climate and brain – Minireview and preface to the focus issue. *Chaos*, 2018, no. 28(3), 033501 p. <https://doi.org/10.1063/1.5027718>
3. Pisarchik A., Feudel U. Control of multistability. *Phys. Rep.*, 2014, no. 540(4), pp. 167–218. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2014.02.007>
4. Hens C., Dana S., Feudel U. Extreme multistability: Attractor manipulation and robustness. *Chaos*, 2015, no. 25(10), pp. 053112. <https://doi.org/10.1063/1.4921351>
5. Pregel F., Wacker A., Schöoll E. Simple model for multistability and domain formation in semiconductor superlattices. *Phys. Rev.*, 1994, no. 50, pp. 1705–1712. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.50.1705>
6. Liu Y., Chavez J. P. Controlling coexisting attractors of an impacting system via linear augmentation. *Physica D.*, 2017, no. 348, pp. 1–11. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2017.02.018>
7. Marmillot P., Kaufman M., Hervagault J-F. Multiple steady states and dissipative structures in a circular and linear array of three cells: Numerical and experimental approaches. *J. Chem. Phys.*, 1991, no. 95(2), pp. 1206–1214. <https://doi.org/10.1063/1.461151>
8. Kuznetsov Y. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 3rd edition. Springer-Verlag, 2004. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3978-7>
9. Mira C., Gardini L., Barugola A., Cathala J.C. *Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Noninvertible Maps*. World Scientific Publishing, Singapore, 1996, 632 p. <https://doi.org/10.1142/2252>

10. Frouzakis C. E., Gardini L., Kevrekidis I. G., Millerioux G., Mira C. On some properties of invariant sets of two-dimensional noninvertible maps. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1997, no. 7(06), pp. 1167–1194. <https://doi.org/10.1142/S0218127497000613>
11. Parker T. S., Chua L. O. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer-Verlag, New York, 1989. <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-3486-9>
12. Nusse H. E., Yorke J. A. A procedure for finding numerical trajectories in chaotic saddles. *Physica D*, 1989, no. 36(1-2), pp. 137–156. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(89\)90253-4](https://doi.org/10.1016/0167-2789(89)90253-4)
13. You Z., Kostelich E. J., Yorke J. A. Calculating stable and unstable manifolds. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1991, no. 01(03), pp. 605–623. <https://doi.org/10.1142/S0218127491000440>
14. England J.P., Krauskopf B., Osinga H.M. Computing one-dimensional stable manifolds and stable sets of planar maps without the inverse. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 2004, no. 3(2), p. 161–190. <https://doi.org/10.1137/030600131>
15. Krauskopf B., Osinga H.M., Doedel E.J., Henderson M.E., Guckenheimer J., Vladimirsky A., Dellnitz M., Junge O. A survey of methods for computing (un)stable manifolds of vector fields. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2005, no. 15(03), pp. 763–791. <https://doi.org/10.1142/S0218127405012533>
16. Funding D. Toward the calculation of higher-dimensional stable manifolds and stable sets for noninvertible and piecewise-smooth maps. *J. Nonlinear Sci.*, 2008, no. 18, pp. 391–413. <https://doi.org/10.1007/s00332-007-9016-4>
17. Li. H., Fan Y., Zhang J. A new algorithm for computing one-dimensional stable and unstable manifolds of maps. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2012, no. 22(01), 1250018 p. <https://doi.org/10.1142/S0218127412500186>
18. Guckenheimer J., Krauskopf B., Osinga H. M., B. Sandstede B. Invariant manifolds and global bifurcations. *Chaos*, 2015, no. 25(9), 097604 p. <https://doi.org/10.1063/1.4915528>
19. Yue X-L., Xu Y., Xu W., Sun J-Q. Global Invariant manifolds of dynamical systems with the compatible cell mapping method. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2019, no. 29(8), 1950105 p. <https://doi.org/10.1142/S0218127419501050>
20. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. *Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems*. World Scientific, Singapore, 2003.
21. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. Equilibrium-torus bifurcation in nonsmooth systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2008, no. 237(7), pp. 930-936. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2007.11.019>
22. Simpson D.J.W. The structure of mode-locking regions of piecewise-linear continuous maps: I. Nearby mode-locking regions and shrinking points. *Nonlinearity*, 2016, no. 30(1), pp. 382–444. <https://doi.org/10.1088/1361-6544/aa4f49>

23. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. Direct transition from a stable equilibrium to quasiperiodicity in non-smooth systems. *Physics Letters A*, 2008, no. 372(13), pp. 2237–2246. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.08.077>
24. Baushev V. S., Zhusubaliyev Zh. T. Indeterminable states of a voltage regulator with pulse-width control. *Elect. Techn.*, 1992, no. 3, pp. 85-98.
25. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., De S., Banerjee S. Transitions from phase-locked dynamics to chaos in a piecewise-linear map. *Physical Review E*, 2008, no. 77, 026206 p. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.77.026206>
26. De S., Dutta P.S., Banerjee S. Torus destruction in a nonsmooth noninvertible map. *Physics Letters A*, 2012, no. 376, pp. 400-406. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2011.11.017>
27. Avrutin V., Zhusubaliyev Zh. T. Nested closed invariant curves in piecewise smooth maps. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2019, no. 29(7), 1930017 p. <https://doi.org/10.1142/S0218127419300179>.

---

### Информация об авторах / Information about the Authors

**Жусубалиев Жаныбай Турсунбаевич**, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной техники, ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск, Российская Федерация, e-mail: zhanybai@gmail.com, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5534-9902>

**Zhanybai T. Zhusubaliyev**, Dr. of Sci. (Engineering), Professor, Department of Computer Science, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: zhanybai@gmail.com, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5534-9902>

**Рубанов Василий Григорьевич**, доктор технических наук, профессор, завкафедрой технической кибернетики, ФГБОУ ВО «Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова», г. Белгород, Российская Федерация, e-mail: vgrubanov@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1795-2708>

**Vasiliy G. Rubanov**, Dr. of Sci. (Engineering), Professor, Department of Engineering Cybernetics, Belgorod State Technological University, Belgorod, Russian Federation, e-mail: vgrubanov@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1795-2708>

**Гольцов Юрий Александрович**, старший преподаватель кафедры технической кибернетики, ФГБОУ ВО «Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова», г. Белгород, Российская Федерация, e-mail: uagoltsov@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6065-8985>

**Yuriy A. Gol'tsov**, Senior Lecturer, Department of Engineering Cybernetics, Belgorod State Technological University, Belgorod, Russian Federation, e-mail: uagoltsov@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6065-8985>