

Устойчивость колебаний импульсной системы управления электроприводом

О.О. Яночкина¹✉, Е.О. Болдырева¹

¹ Юго-Западный государственный университет
ул. 50 лет Октября 94, г. Курск 305040, Российская Федерация

✉ e-mail: yanoolga@gmail.com

Резюме

Цель исследования. Исследование устойчивости колебаний импульсной системы управления электроприводом постоянного тока с целью обеспечения рабочих режимов с заданными динамическими характеристиками.

Методы. Анализ устойчивости периодических решений дифференциальных уравнений с разрывной правой частью сводится к задаче исследования локальной устойчивости неподвижных точек отображения.

Результаты. Проведен анализ устойчивости в зависимости от напряжения питания электропривода и коэффициента усиления корректирующего звена в цепи обратной связи. Выявлено, что граница области устойчивости на плоскости варьируемых параметров имеет ярко выраженный экстремум в виде максимума в бифуркационной точке коразмерности два, называемой еще точкой резонанса 1:2. По одну сторону от этой точки область устойчивости ограничена линией бифуркации Неймарка-Сакера, а по другую – линией бифуркации удвоения периода. Это означает, что с изменением параметров радиус области устойчивости сначала растет, достигая максимума в точке резонанса 1:2, а затем уменьшается. Этот важный вывод можно использовать в оптимизационных расчетах.

Заключение. Выполнен анализ устойчивости импульсной системы управления электроприводом постоянного тока, поведение которой описывается дифференциальными уравнениями разрывной правой частью. Задача поиска периодических решений дифференциальных уравнений сведена к задаче поиска неподвижных точек отображения. Неподвижные точки отображения удовлетворяют системе нелинейных уравнений, которая решалась численно методом Ньютона-Рафсона. Устойчивость периодических решений дифференциальных уравнений отвечает устойчивости неподвижных точек соответствующего отображения. Исследования проводились при вариации коэффициента усиления в цепи обратной связи и напряжения питания. Выявлено, что потеря неподвижной точки происходит через суперкритическую бифуркацию Неймарка-Сакера, когда при изменении параметров комплексно-сопряженная пара мультипликаторов выходит из единичного круга. Однако при увеличении напряжения питания граница бифуркации Неймарка-Сакера переходит в границу бифуркации удвоения периода в точке резонанса 1:2.

Ключевые слова: система автоматического управления электроприводом; широтно-импульсная модуляция, устойчивости периодических режимов; кусочно-гладкие отображения; бифуркация Неймарка-Сакера; бифуркация удвоения периода; точка резонанса 1:2.

Конфликт интересов: Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Благодарности: Работа выполнена под руководством д.т.н., проф., профессора кафедры вычислительной техники ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет» Жусубалиева Ж.Т.

Для цитирования: Яночкина О.О., Болдырева Е.О. Устойчивость колебаний импульсной системы управления электроприводом // Известия Юго-Западного государственного университета. 2020; 24(3): 152-165. <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2020-24-3-152-165>.

Поступила в редакцию 30.03.2020

Подписана в печать 27.04.2020

Опубликована 30.06.2020

Vibration Stability of the Impulse System of the Electric Drive Control

Olga O. Yanochkina ¹ ✉, Eugenia O. Boldyreva ¹

¹ Southwest State University
50 Let Oktyabrya str. 94, Kursk 305040, Russian Federation

✉ e-mail: yanoolga@gmail.com

Abstract

Purpose of research is Study of vibration stability of the impulse system of direct current electric drive in order to ensure operating modes with specified dynamic characteristics.

Methods. The stability analysis of periodic solutions of differential equations with discontinuous right-hand side is reduced to the problem of studying local stability of fixed map points.

Results. The analysis of stability is carried out depending on the supply voltage of the electric drive and the gain of the correcting link in the feedback circuit. It is revealed that the boundary of the stability region on the plane of the variable parameters has a pronounced extremum in the form of a maximum at the bifurcation point of codimension two, also called the resonance point 1: 2. On one side of this point, the stability region is bounded by the Neimark-Sacker bifurcation line, and on the other, by the period-doubling bifurcation line. This means that with a change in the parameters, the radius of the stability region first increases, reaching a maximum at the resonance point 1: 2, and then decreases. This important conclusion can be used in optimization calculations.

Conclusion. The analysis of the vibration stability of the impulse system of direct current electric drive, the behavior of which is described by differential equations of the discontinuous right-hand side, is carried out. The problem of finding periodic solutions to differential equations is reduced to the problem of finding fixed points of the map. The fixed points of the map satisfy a system of nonlinear equations, which was solved numerically by the Newton-Raphson method. The stability of periodic solutions of differential equations corresponds to the stability of fixed points of the corresponding map. The studies were carried out with variation of the gain in the feedback circuit and the supply voltage. It is revealed that the loss of a fixed point occurs through the supercritical Neimark-Sacker bifurcation, when the complex-conjugate pair of multipliers leaves the unit circle when the parameters change. However, with an increase in the supply voltage, the Neimark-Sacker bifurcation boundary passes into the period-doubling bifurcation boundary at the 1: 2 resonance point.

Keywords: electric drive automatic control system; pulse-width modulation; stability of periodic modes; piecewise smooth maps; Neimark-Sacker bifurcation; period doubling bifurcation; 1: 2 resonance point.

Conflict of interest. The authors declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

Acknowledgements: Work was carried out under the supervision of doctor of technical sciences, prof., professor of the Department of Computer Engineering of the Southwest State University Zhusubaliyev Zh. T.

Введение

Одна из основных особенностей импульсных систем автоматического управления – это колебательный режим работы с частотой модуляции, обусловленный импульсным характером преобразования энергии. Поэтому ключевой задачей при их проектировании является обеспечение устойчивости периодических режимов с заданными динамическими характеристиками в широком диапазоне вариации параметров и при воздействии помех [1,2].

Потеря устойчивости может приводить к различным нелинейным явлениям, таким как возникновение субгармонических колебаний, хаотических и квазипериодических режимов. В результате этого снижается точность регулирования скорости электропривода, на несколько порядков увеличивается амплитуда колебаний момента двигателя и угловой скорости вращения якоря. Поэтому исследование устойчивости периодических режимов при проектировании конкретного класса импульсных систем автоматического управления является важной задачей.

В качестве конкретного объекта для исследований в работе рассматривается математическая модель импульсной системы управления электроприводом постоянного тока [3]. Такая система описывается неавтономными дифференци-

альными уравнениями с разрывной правой частью [1,2]. С целью упрощения исследований математическая модель приведена к так называемой канонической форме [1,2], допускающей численно-аналитический анализ решений исходной системы дифференциальных уравнений.

Сложность решения поставленной задачи обусловлена следующими обстоятельствами. Во-первых, для анализа устойчивости в нелинейных системах надо предварительно найти искомое периодическое движение, например, путем решения краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений [2]. При этом важно, чтобы выбранный численный метод позволял находить как устойчивые, так и неустойчивые режимы. Таким образом, задачи поиска периодических режимов и исследования их локальной устойчивости в нелинейных системах неразрывны.

Во-вторых, импульсные системы автоматического управления обычно описываются дифференциальными уравнениями с разрывными правыми частями. Существующая теория устойчивости, разработанная для гладких дифференциальных уравнений, не применима для таких уравнений.

Поэтому возможны два пути решения этой задачи: использовать теорию устойчивости разрывных систем [2,4,5,6], для применения которой в практи-

ческих задачах требуется специальная подготовка, или применить методы современной бифуркационной теории кусочно-гладких отображений.

В представленной работе для анализа устойчивости выбран второй путь, а именно, полученные дифференциальные уравнения с разрывной правой частью в безразмерной форме сведены к кусочно-гладкому непрерывному отображению. Тогда задача поиска периодических решений дифференциальных уравнений упрощается за счёт того, что отпадает необходимость решения сложной краевой задачи для уравнений с разрывной правой частью. В итоге эта задача сводится к задаче поиска неподвижных точек отображения, а устойчивость периодических решений дифференциальных уравнений отвечает устойчивости неподвижных точек соответствующего отображения. Неподвижные точки полученного отображения удовлетворяют системе нелинейных уравнений, которые решались численно методом Ньютона-Рафсона.

Проведен анализ устойчивости в зависимости от напряжения питания и коэффициента усиления корректирующего звена в цепи обратной связи.

Выявлено, что граница области устойчивости на плоскости варьируемых параметров имеет ярко выраженный экстремум в виде максимума в бифуркационной точке коразмерности два, называемой еще точкой резонанса 1:2 [7]. По одну сторону точки коразмерности два область устойчивости ограни-

чена линией бифуркации Неймарка-Саккера [7], а по другую – линией бифуркации удвоения периода.

Материалы и методы

Назначение рассматриваемой системы состоит в том, чтобы автоматически поддерживать скорость электропривода на заданном уровне или автоматически осуществлять слежение за задающим сигналом, закон изменения которого определяется конкретной задачей управления работой производственных механизмов. Как было отмечено во введении, основная цель исследований заключается в построении области устойчивости рабочих режимов в пространстве параметров.

На рис. 1 представлена схема замещения этой системы [3]. Здесь VT – полупроводниковый преобразователь, VD – обратный диод, E_0 – источник постоянного напряжения. Объектом управления является электродвигатель постоянного тока M . В качестве датчика обратной связи используется тахогенератор VS , определяющий угловую скорость вращения якоря ω . Регулятор состоит из усилителя сигнала ошибки DA_2 и источника опорного напряжения V_{ref} . Величина V_{ref} пропорциональна значению угловой скорости ω . Модулятор включает в себя компаратор DA_1 , устройство выборки-хранения S/H , генератор тактовых импульсов V_{clock} и формирователь пилообразного сигнала $V_{ramp}(t)$.

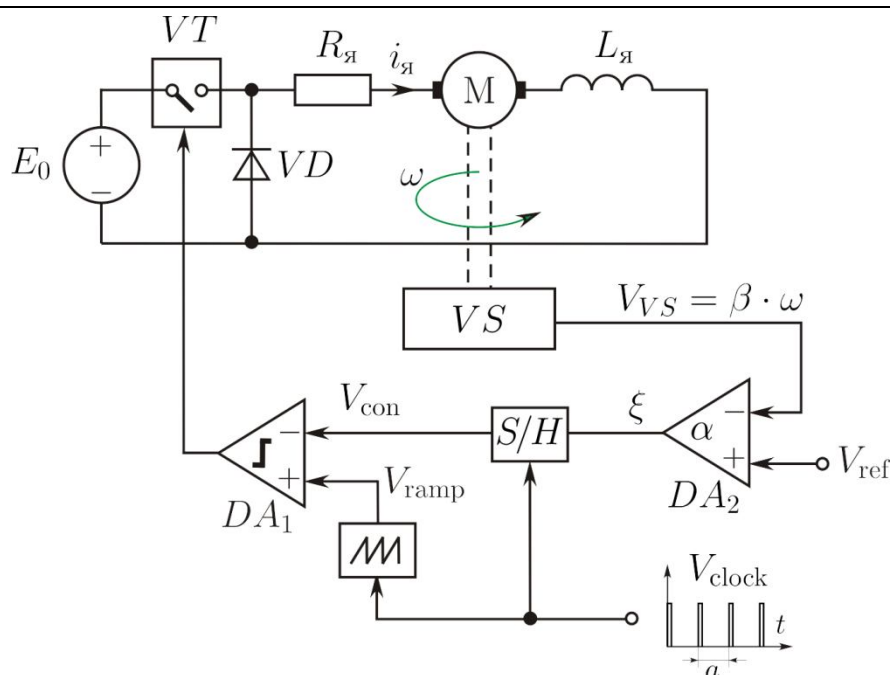


Рис. 1. Схема замещения системы управления

Fig. 1. Equivalent circuit of the control system

Поведение такой системы согласно схеме замещения, приведенной на рис. 1, описывается неавтономными дифференциальными уравнения с разрывной правой частью [3]

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{R_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} x_1 - \frac{C_{\omega}}{L_{\text{я}}} x_2 + \frac{E_0}{L_{\text{я}}} K_{\text{F}}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{C_{\omega}}{J} x_1 - \frac{M_{\text{c}}}{J}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $K_{\text{F}} = \frac{1}{2} (1 - \text{sign}(\xi_k - V_{\text{ramp}}(t)))$,

$$\xi_k = \xi(t) \big|_{t=a[t/a]},$$

$$\xi(t) = \alpha \cdot (V_{\text{ref}} - \beta x_2(t));$$

$$V_{\text{ramp}}(t) = \frac{V_0}{\alpha} (t/a - [t/a]).$$

Здесь x_1 – ток якоря $i_{\text{я}}$; x_2 – угловая скорость вращения якоря ω ; $L_{\text{я}}$ и $R_{\text{я}}$ – соответственно, суммарная индуктивность и сопротивление якорной цепи

двигателя; C_{ω} – постоянная двигателя; J – момент инерции, приведённый к валу двигателя; M_{c} – статический момент на валу двигателя.

В отличие от системы, рассмотренной в [3], в представленной работе исследуется система с широтно-импульсной модуляцией первого рода [1]. В (1) ξ и K_{F} – соответственно, сигналы на входе и на выходе модулятора; $[t/a]$ – функция, выделяющая целую часть аргумента t/a ; $V_{\text{vs}} = \beta x_2$ – выходное напряжение тахогенератора VS , где β – чувствительность датчика скорости; V_{ref} , V_0 – сигнал задания и опорный сигнал модулятора; α – коэффициент усиления корректирующего звена DA_2 ; a – период следования импульсов тактового генератора.

Для выбранных значений параметров собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы коэффициентов системы (1) действительны и отрицательны [1,2]:

$$\lambda_1 = -\frac{R_{\text{я}}}{2 \cdot L_{\text{я}}} + \sqrt{\frac{R_{\text{я}}^2}{4L_{\text{я}}^2} - \frac{C_{\omega}^2}{J \cdot L_{\text{я}}}};$$

$$\lambda_2 = -\frac{R_{\text{я}}}{2 \cdot L_{\text{я}}} - \sqrt{\frac{R_{\text{я}}^2}{4L_{\text{я}}^2} - \frac{C_{\omega}^2}{J \cdot L_{\text{я}}}}.$$

От переменных x_1, x_2 перейдем к безразмерным переменным x, y с помощью замены [2]:

$$x_1 = \frac{E_0}{L_{\text{я}}(\lambda_1 - \lambda_2)} \left(\frac{\lambda_2 + R_{\text{я}}/L_{\text{я}}}{\lambda_1} x - \frac{\lambda_1 + R_{\text{я}}/L_{\text{я}}}{\lambda_2} y \right),$$

$$x_2 = \frac{E_0 \cdot C_{\omega}}{J \cdot L_{\text{я}}(\lambda_2 - \lambda_1)} \left(\frac{x}{\lambda_1} - \frac{y}{\lambda_2} \right). \quad (2)$$

Подставив (2) в (1) и разрешив (1) относительно производных, получим [2]

$$\dot{x} = \lambda_1 (x - K_{\text{F}} + \Omega_1);$$

$$\dot{y} = \lambda_2 (y - K_{\text{F}} + \Omega_2), \quad (3)$$

$$K_{\text{F}} = \frac{1}{2} (1 - \text{sign}(\xi_k)), \quad \xi_k = \varphi_k - \eta(t),$$

$$\varphi_k = \nu y_k - x_k + q,$$

$$\eta(t) = \frac{P}{\alpha} (t/a - \lfloor t/a \rfloor),$$

$$x_k = x(ka), \quad y_k = y(ka), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь

$$P = \frac{V_0 C_{\omega} (\lambda_2 - \lambda_1)}{\beta \lambda_2 E_0}; \quad q = \frac{V_{\text{ref}}}{V_0} P; \quad \nu = \frac{\lambda_1}{\lambda_2};$$

$$\Omega_1 = \frac{M_c C_{\omega}}{E_0 \cdot J \cdot (\lambda_2 + R_{\text{я}}/L_{\text{я}})};$$

$$\Omega_2 = \frac{M_c C_{\omega}}{E_0 \cdot J \cdot (\lambda_1 + R_{\text{я}}/L_{\text{я}})}.$$

Уравнения (3) были сведены к кусочно-гладкому отображению [2]

$$x_{k+1} = e^{a\lambda_1} (x_k - 1 + \Omega_1) + e^{a\lambda_1} (1 - z_k) - \Omega_1;$$

$$y_{k+1} = e^{a\lambda_2} (y_k - 1 + \Omega_2) + e^{a\lambda_2} (1 - z_k) - \Omega_2, \quad (4)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\text{где } z_k = \begin{cases} 0, & \text{при } \varphi_k < 0; \\ 1, & \text{при } \varphi_k > \frac{P}{\alpha}; \\ \frac{\alpha}{P} \cdot \varphi_k, & \text{при } 0 \leq \varphi_k \leq \frac{P}{\alpha}, \end{cases}$$

$$\text{где } \varphi_k = \nu y_k - x_k + q.$$

Результаты и их обсуждение

Напомним, что рабочий режим рассматриваемой системы – вынужденные периодические колебания с периодом модуляции.

Потеря устойчивости этого режима при вариации параметров может приводить к возникновению субгармонических колебаний или квазипериодических режимов, а при определенных условиях и к хаотизации колебаний. В результате этого снижается точность регулирования скорости электропривода, на несколько порядков увеличивается амплитуда колебаний тока якоря и угловой скорости, что снижает показатели качества управления.

Исследования проводились при следующих значениях параметров [3]

$$R_{\text{я}} = 0,53 \text{ Ом}, \quad L_{\text{я}} = 0,53 \cdot 10^{-3} \text{ Гн};$$

$$C_{\omega} = 0,362 \text{ В} \cdot \text{с}, \quad J = 0,001884 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$M_c = 10 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad V_{\text{ref}} = 3 \text{ В}; \quad V_0 = 10 \text{ В};$$

$$\beta = 0,0318 \text{ В/с}; \quad a = 0,001; \quad E_0 = 100 \text{ В};$$

$$0 < \alpha < 120.$$

В качестве варьируемых параметров были выбраны напряжение питания E_0 и коэффициент усиления α . Напомним, что вынужденным периодическим колебаниям с периодом модуляции отвечает неподвижная точка отображения (4).

На рис. 2,а приведена однопараметрическая бифуркационная диаграмма, рассчитанная в диапазоне изменения коэффициента усиления $34,0 < \alpha < 40,0$ и $E_0 = 35,0$, а на рис. 2,б изображена зависимость комплексно-сопряженной па-

ры мультипликаторов $\rho_{1,2} = \mu \pm i \cdot \gamma$ неподвижной точки от α (годограф мультипликаторов).

Как можно видеть из графиков $\rho_{1,2} = \mu \pm i \cdot \gamma$, при $\alpha < \alpha_{NS}$ существует устойчивая гиперболическая неподвижная точка: мультипликаторы $\rho_{1,2} = \mu \pm i \cdot \gamma$ находятся внутри единичного круга, так как $|\rho_{1,2}| = \sqrt{\mu^2 + \gamma^2} < 1$. Такая неподвижная точка называется устойчивым фокусом.

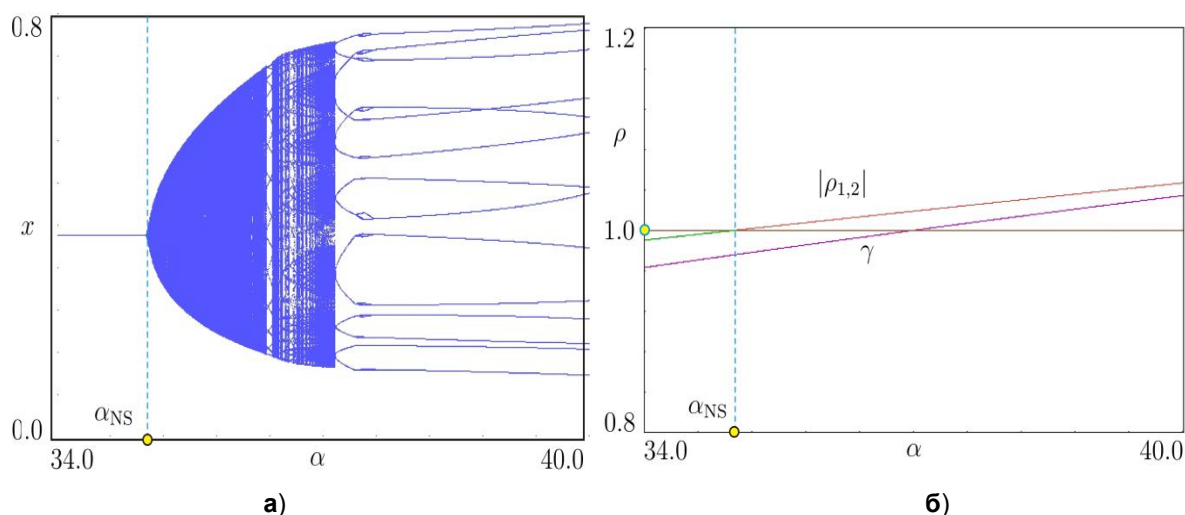


Рис. 2. Бифуркация Неймарка-Сакера: **а** – бифуркационная диаграмма; **б** – годограф

комплексно-сопряжённой пары мультипликаторов, где $|\rho_{1,2}|$ – модуль мультипликаторов

$$\rho_{1,2} = \mu \pm i \cdot \gamma$$

Fig. 2. Neimark-Sacker bifurcation: **a** – bifurcation diagram; **b** – hodograph of a complex conjugate

pair of multipliers, where $|\rho_{1,2}|$ is the modulus of multipliers $\rho_{1,2} = \mu \pm i \cdot \gamma$

В точке $\alpha = \alpha_{NS}$ комплексно-сопряженная пара мультипликаторов $\rho_{1,2} = \mu \pm i \cdot \gamma$ выходит на границу единичного круга: $|\rho_{1,2}| = \sqrt{\mu^2 + \gamma^2} = 1$. В этом случае говорят, что неподвижная точка становится негиперболической.

Для анализа устойчивости таких инвариантных множеств линейная теория, которую мы используем, не работает, поскольку для негиперболических неподвижных точек поведение траекторий линеаризованной и исходной системы может быть принципиально различным.

Но эта неподвижная точка негрубая: малое шевеление параметров превращает негиперболическую неподвижную точку в гиперболическую. Можно показать, что негиперболическая неподвижная точка с комплексно-сопряженной парой мультипликаторов, лежащих на границе единичного круга, является асимптотически устойчивой.

Заметим, что границей области устойчивости являются те значения параметров, при которых неподвижная точка оказывается негиперболической. Как показано на рис. 2,б, при дальнейшем увеличении параметра α комплексно-сопряженная пара мультипликаторов $\rho_{1,2} = \mu \pm i \cdot \gamma$ выходит из единичного круга: $|\rho_{1,2}| = \sqrt{\mu^2 + \gamma^2} > 1$. В результате этого неподвижная точка становится неустойчивым фокусом.

Потеря устойчивости приводит к мягкому рождению двухчастотных квазипериодических колебаний (как показано на рис. 2,а. Таким колебаниям в фазовом пространстве отображения отвечает замкнутая инвариантная кривая. Такой переход называется суперкритической бифуркацией Неймарка-Саккера [7].

В области параметров с квазипериодической динамикой существуют окна с периодической динамикой, отвечающие явлению захвата частот или резонансу, когда движение на замкнутой инвариантной кривой становится периодическим. На рис. 2,а хорошо видна область резонансного периодического

режима с периодом 14. Этим областям в пространстве параметров отвечают так называемые языки Арнольда [7–15].

Как показали исследования, при вариации параметров граница бифуркации Неймарка-Саккера переходит в линию бифуркации удвоения периода в точке коразмерности два, где оба мультипликатора обращаются в минус единицу $\rho_1 = \rho_2 = -1, 0$. Это так называемая точка резонанса 1:2, где выполняются два бифуркационных условия – бифуркации Неймарка-Саккера [7] и бифуркации удвоения периода [7,16–21].

На рис. 3 показаны бифуркационные кривые на плоскости параметров (E_0, α) . Область устойчивости неподвижной точки расположена слева этих кривых. Линия бифуркации Неймарка-Саккера переходит в линию бифуркации удвоения периода в точке коразмерности два, называемой точкой резонанса 1:2.

На рис. 4,а показана бифуркационная диаграмма зависимости мультипликаторов до точки резонанса 1:2 при $E_0=80$ В. На этом участке потеря устойчивости приводит к возникновению двухчастотных квазипериодических колебаний. На рис. 4,б хорошо виден момент выхода комплексно-сопряженных мультипликаторов за границу единичного круга. В той части границы, расположенной выше точки резонанса 1:2, потеря устойчивости, когда один из мультипликаторов выходит из единичного круга через -1 , приводит к удвоению периода колебаний (рис.5,а,б).

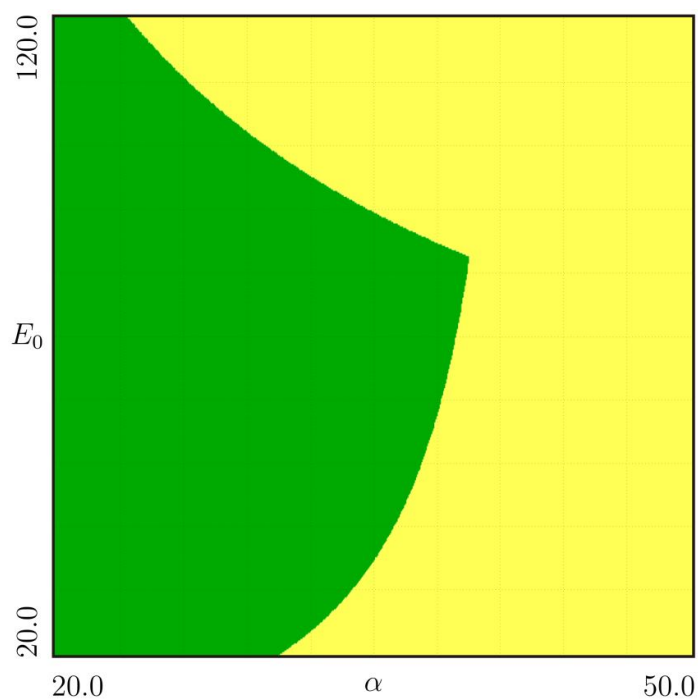


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма на плоскости параметров (α, E_0)

Fig. 3. Bifurcation diagram in the (α, E_0) parameter plane

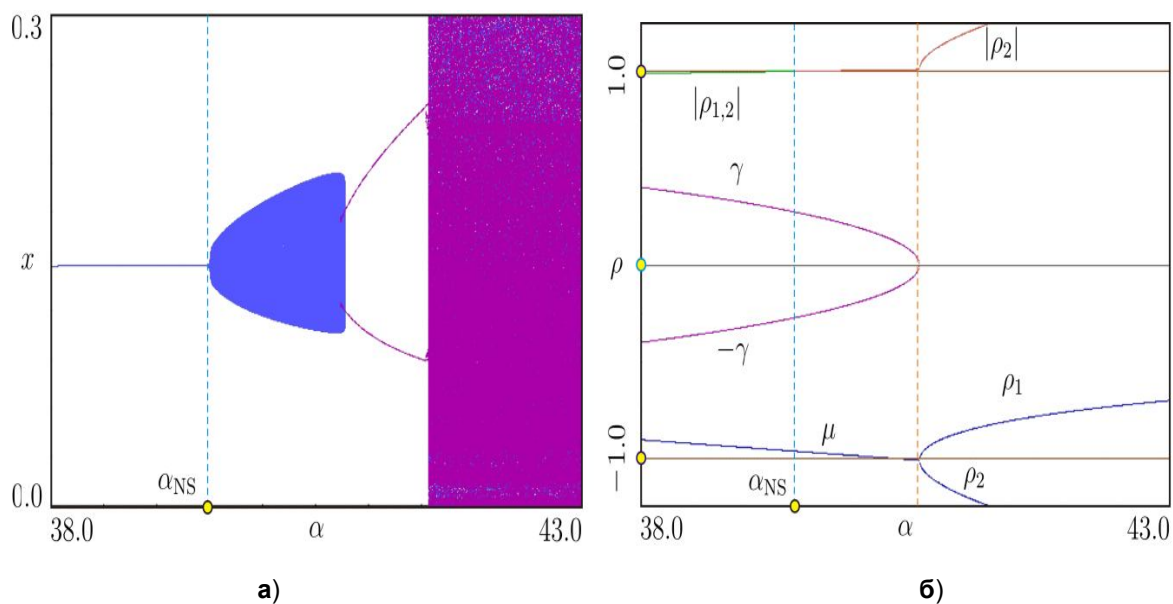


Рис. 4. Динамика вблизи точки резонанса 1:2: **а** – бифуркационная диаграмма, $E_0 = 80$ В; **б** – годограф мультипликаторов

Fig. 4. Dynamics near the resonance point 1:2: **a** – bifurcation diagram, $E_0 = 80$ В, **б** – hodograph of multipliers

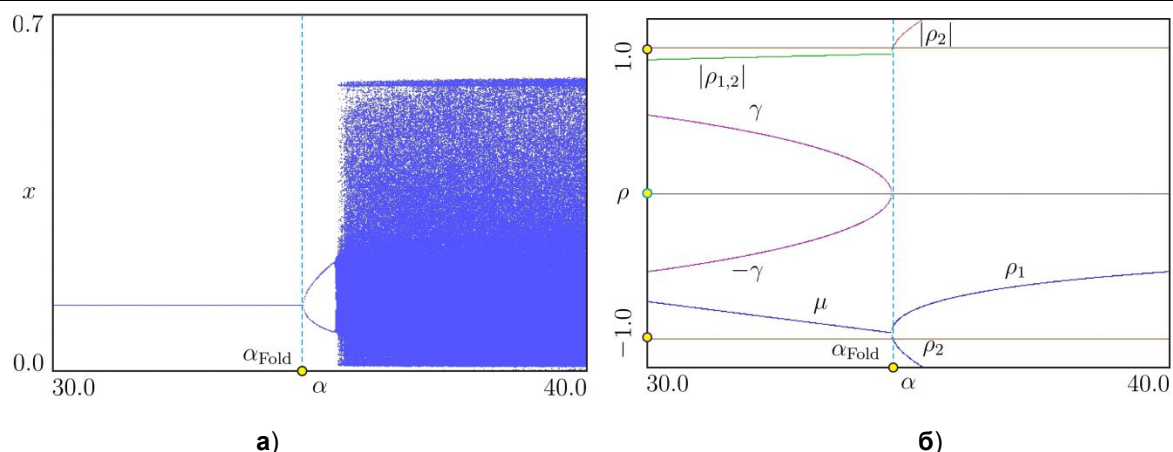


Рис. 5. Бифуркация удвоения периода: **а** – бифуркационная диаграмма; **б** – годограф мультипликаторов

Fig. 5. Period-doubling bifurcation: **a** – bifurcation diagram; **b** – hodograph of multipliers

Отметим, что с увеличением напряжения питания радиус области устойчивости по коэффициенту усиления растет, достигая максимума в точке резонанса 1:2, а затем уменьшается. Этот важный вывод можно использовать в оптимизационных расчетах.

Выводы

В представленной работе исследована устойчивость импульсной системы автоматического управления электроприводом постоянного тока, описываемой дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью. Уравнения движения приведены к так называемой канонической форме, допускающей численно-аналитический анализ решений. Полученные дифференциальные уравнения в безразмерной форме сведены к двумерному кусочно-гладкому непрерывному отображению.

Задача поиска периодических решений дифференциальных уравнений сведена к задаче поиска неподвижных

точек двумерного отображения. Неподвижные точки этого отображения удовлетворяют системе нелинейных уравнений, которая решалась численно методом Ньютона-Рафсона. Устойчивость периодических решений дифференциальных уравнений отвечает устойчивость неподвижных точек соответствующего отображения.

Выполнены исследования устойчивости периодических режимов в зависимости от коэффициента усиления в цепи обратной связи и напряжения питания. Выявлено, что потеря неподвижной точки отображения происходит через бифуркацию Неймарка-Сакера, когда при вариации параметров комплексно-сопряженная пара мультипликаторов выходит за границу единичного круга. Однако при увеличении напряжения питания граница бифуркации Неймарка-Сакера переходит в границу бифуркации удвоения периода в точке резонанса 1:2.

Список литературы

1. Хаотическая динамика импульсных систем / Ж. Т. Жусубалиев, В. Г. Рубанов, В. С. Титов, О. О. Яночкина. Белгород: Изд-во БГТУ, 2018.
2. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. Singapore: World Scientific; 2003. <https://doi.org/10.1142/5313>
3. Зотин Д. В., Михальченко Г.Я. Режимы функционирования электропривода постоянного тока с импульсным регулированием // Проблемы автоматизации энергосберегающих технологий: сборник научных трудов / под. ред. Г.Я. Михальченко. Брянск: Изд.-во БГТУ, 2001. С. 79 –87.
4. Feigin M. Doubling of the oscillation period with C-bifurcations in piecewise continuous systems // J. Appl. Math. Mech. 1970. Vol. 34. № (5)6. P. 822–830. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(70\)90064-X](https://doi.org/10.1016/0021-8928(70)90064-X)
5. Filippov A.F. Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-7793-9>
6. Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications / di M. Bernardo, C. J. Budd, A. R. Champneys, P. Kowalczyk. London: Springer-Verlag, 2008. <https://doi.org/10.1007/978-1-84628-708-4>
7. Kuznetsov Yu. Elements of Applied Bifurcation Theory. New York, Springer, 2004. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3978-7>
8. Bifurcations from an invariant circle for two-parameter families of maps of the plane / D. G. Aronson, M. A. Chory, G. R. Hall, R.P. McGehee // A computer-assisted study. Comm. Math. Physics. 1982, vol. 83. № 3. P. 303–354. <https://doi.org/10.1007/BF01213607>
9. Global bifurcations of closed invariant curves in two-dimensional maps: A computer assisted study / A. Agliari, G.-I. Bischi, R. Dieci, L. Gardini // Int. J. Bifurcation Chaos. 2005. Vol. 15. № 4. P. 1285–1328, <https://doi.org/10.1142/S0218127405012685>
10. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. Torus birth bifurcation in a DC/DC converter // IEEE Trans. Circ. & Sys. I. 2006. Vol. 53. № 8. P. 1839–1850. <https://doi.org/10.1109/TCSI.2006.879060>
11. Sushko I., Gardini L. Center Bifurcation for a Two-Dimensional border-Collision Normal Form // Int. J. Bifurcation Chaos. 2008. Vol. 18. №4. P. 1029–1050. <https://doi.org/10.1142/S0218127408020823>
12. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. Equilibrium-torus bifurcation in nonsmooth systems // Physica D. 2008. Vol. 237, № 7. P. 930 – 936. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2007.11.019>
13. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. Direct transition from a stable equilibrium to quasiperiodicity in non-smooth systems // Physics Letters A. 2008. Vol. 372, № 13. P. 2237–2246. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.08.077>

14. Zhusubaliyev Zh. T., Soukhoterlin E., Mosekilde E. Quasiperiodicity and torus breakdown in a power electronic DC/DC converter // *Mathematics and Computers in Simulation*. 2007. Vol. 73, № 6. P. 364–377. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2006.06.021>
15. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., Yanochkina O.O. Torus bifurcations in multi-level converter systems // *Int. J. Bifurcation Chaos*. 2011. Vol. 21, № 8. P. 2343-2356. <https://doi.org/10.1142/S0218127411029835>
16. An Exploration of Dynamical Systems and Chaos / J. Argyris, G. Faust, M. Haase, R. Friederich. New York: Springer. 2015. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-46042-9>
17. Alligood K.T., Sauer T.D., Yorke J. A. Chaos: An Introduction to Dynamical Systems. New York: Springer, 2000. <https://doi.org/10.1007/b97589>
18. Parker T. S. Chua L.O. Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1989. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3486-9>
19. Strogatz S. H. Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering. 2nd ed. Boulder: Westview Press, 2015. <https://doi.org/10.1063/PT.3.2751>
20. Palis J., De Melo W. Geometric Theory of Dynamical Systems. New York, Berlin: Springer-Verlag, 1982. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5703-5>
21. Avrutin V., Gardini L., Sushko I., Tramontana F. Continuous and Discontinuous Piecewise-Smooth One-Dimensional Maps: Invariant Sets and Bifurcation Structures. Singapore: World Scientific, 2019. <https://doi.org/10.1142/8285>

References

1. Zhusubaliyev Zh. T., Rubanov V. G., Titov V. S., Yanochkina O. O. *Xaoticheskaya dinamika impul'snykh sistem* [Chaotic dynamics of impulse systems]. Belgorod, 2018 (In Russ.)
2. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. *Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems*. Singapore: World Scientific, 2003. <https://doi.org/10.1142/5313>
3. Zotin D. V., Mikhal'chenko G.Ya. [Modes of operation of a DC electric drive with pulse control]. *Problemy avtomatizatsii energosberegayushchikh tekhnologii*. Sbornik nauchnykh trudov [Problems of automation of energy-saving technologies: collection of scientific papers]. Bryansk, BGTU Publ., 2001, pp. 79-87 (In Russ.)
4. Feigin M. Doubling of the oscillation period with C-bifurcations in piecewise continuous systems. *J. Appl. Math. Mech*, 1970, vol. 34, no. (5)6, pp. 822–830. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(70\)90064-X](https://doi.org/10.1016/0021-8928(70)90064-X)
5. Filippov A.F. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers; 1988. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-7793-9>

6. di Bernardo M., Budd C. J., Champneys A. R., Kowalczyk P. *Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*. London, Springer-Verlag, 2008. <https://doi.org/10.1007/978-1-84628-708-4>
7. Kuznetsov Yu. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. New York, Springer, 2004. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3978-7>
8. Aronson D. G., Chory M. A., Hall G. R., McGehee R.P. Bifurcations from an invariant circle for two-parameter families of maps of the plane. A computer-assisted study. *Comm. Math. Physics*, 1982, vol. 83, no.3, pp. 303–354. <https://doi.org/10.1007/BF01213607>
9. Agliari A., Bischi G.-I., Dieci R., Gardini L. Global bifurcations of closed invariant curves in two-dimensional maps: A computer assisted study. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 2005, vol. 15, no. 4, pp. 1285–1328. <https://doi.org/10.1142/S0218127405012685>
10. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. Torus birth bifurcation in a DC/DC converter. *IEEE Trans. Circ. & Sys. I*. 2006, vol. 53, no. 8, pp. 1839–1850. <https://doi.org/10.1109/TCSI.2006.879060>
11. Sushko I., Gardini L. Center Bifurcation for a Two-Dimensional border-Collision Normal Form. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 2008, vol. 18, no. 4, pp. 1029–1050. <https://doi.org/10.1142/S0218127408020823>
12. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. Equilibrium-torus bifurcation in nonsmooth systems. *Physica D.*, 2008, vol. 237, no. 7, pp. 930 – 936. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2007.11.019>
13. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. Direct transition from a stable equilibrium to quasiperiodicity in non-smooth systems. *Physics Letters A.*, 2008, vol. 372, no. 13, pp. 2237–2246. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.08.077>
14. Zhusubaliyev Zh. T., Soukhoterlin E., Mosekilde E. Quasiperiodicity and torus breakdown in a power electronic DC/DC converter. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2007, vol. 73, no. 6, pp. 364–377. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2006.06.021>
15. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., Yanochkina O.O., Torus bifurcations in multi-level converter systems. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 2011, vol. 21, no. 8, pp. 2343-2356. <https://doi.org/10.1142/S0218127411029835>
16. Argyris J., Faust G., Haase M., Friederich R. *An Exploration of Dynamical Systems and Chaos*. New York: Springer; 2015. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-46042-9>
17. Alligood K.T., Sauer T.D., Yorke J. A. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. New York: Springer, 2000. <https://doi.org/10.1007/b97589>
18. Parker T. S. Chua L.O. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Berlin: Springer-Verlag, 1989. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3486-9>
19. Strogatz S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. 2nd ed. Boulder, Westview Press, 2015. <https://doi.org/10.1063/PT.3.2751>

20. Palis J., De Melo W. *Geometric Theory of Dynamical Systems*. New York, Berlin: Springer-Verlag, 1982. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5703-5>

21. Avrutin V., Gardini L., Sushko I., Tramontana F. *Continuous and Discontinuous Piecewise-Smooth One-Dimensional Maps: Invariant Sets and Bifurcation Structures*. Singapore: World Scientific, 2019. <https://doi.org/10.1142/8285>

Информация об авторах / Information about the Authors

Яночкина Ольга Олеговна, кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительной техники, ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск, Российская Федерация, e-mail: yanoolga@gmail.com

Olga O. Yanochkina, Cand. of Sci. (Engineering), Associate Professor, Department of Computer Science, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: yanoolga@gmail.com

Болдырева Евгения Олеговна, студент кафедры вычислительной техники, ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск, Российская Федерация, e-mail: eugeniaboldyreva@yandex.ru

Eugenia O. Boldyreva, Student, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: eugeniaboldyreva@yandex.ru