

Оригинальная статья / Original article

<https://doi.org/10.21869/2223-1560-2020-24-3-137-151>

Бифуркационный анализ кусочно-гладких бимодальных отображений с помощью нормальной формы

Ж. Т. Жусубалиев¹, Д. С. Кузьмина¹, О. О. Яночкина¹ ✉

¹ Юго-Западный государственный университет
ул. 50 лет Октября 94, г. Курск 305040, Российская Федерация

✉ e-mail: yanoolga@gmail.com

Резюме

Цель работы. Исследование бифуркаций в бимодальных кусочно-гладких отображениях с использованием кусочно-линейного непрерывного отображения в качестве нормальной формы.

Методы. Мы предлагаем методику определения параметров нормальной формы на базе линеаризации кусочно-гладкого отображения в окрестности критической неподвижной точки.

Результаты. На плоскости параметров численно и аналитически построена область устойчивости неподвижной точки. Показано, что эта область ограничена двумя бифуркационными кривыми: линиями классической бифуркации удвоения периода и «border collision» бифуркации. Предложена методика определения параметров нормальной формы как функции параметров кусочно-гладкого отображения. Проведен анализ «border-collision» бифуркаций с использованием кусочно-линейной нормальной формы.

Заключение. Выполнен бифуркационный анализ кусочно-гладкого необратимого бимодального отображения класса $Z_1-Z_3-Z_1$, моделирующего динамику системы управления с импульсной модуляцией. Предложена методика расчёта параметров кусочно-линейного непрерывного отображения, используемого в качестве нормальной формы. Рассчитаны основные бифуркационные переходы при выходе из области устойчивости как с использованием исходного отображения, так и с помощью кусочно-линейной нормальной формы. Численно доказана топологическая эквивалентность этих отображений, указывающая на достоверность результатов расчёта параметров нормальной формы.

Ключевые слова: кусочно-гладкое бимодальное отображение класса $Z_1-Z_3-Z_1$; нормальная форма; кусочно-линейное непрерывное отображение; «border collision» бифуркации.

Конфликт интересов: Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Для цитирования: Жусубалиев Ж. Т., Кузьмина Д. С., Яночкина О. О. Бифуркационный анализ кусочно-гладких бимодальных отображений с помощью нормальной формы // Известия Юго-Западного государственного университета. 2020; 24(3): 137-151. <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2020-24-3-137-151>.

Поступила в редакцию 12.05.2020

Подписана в печать 28.05.2020

Опубликована 30.06.2020

Bifurcation Analysis of Piecewise Smooth Bimodal Maps Using Normal Form

Zhanybai T. Zhusubaliyev¹, Daria S. Kuzmina¹, Olga O. Yanochkina¹ ✉

¹ Southwest State University
50 Let Oktyabrya str. 94, Kursk 305040, Russian Federation

✉ e-mail: yanoolga@gmail.com

Abstract

Purpose of research. Study of bifurcations in piecewise-smooth bimodal maps using a piecewise-linear continuous map as a normal form.

Methods. We propose a technique for determining the parameters of a normal form based on the linearization of a piecewise-smooth map in a neighborhood of a critical fixed point.

Results. The stability region of a fixed point is constructed numerically and analytically on the parameter plane. It is shown that this region is limited by two bifurcation curves: the lines of the classical period-doubling bifurcation and the "border collision" bifurcation. It is proposed a method for determining the parameters of a normal form as a function of the parameters of a piecewise smooth map. The analysis of "border-collision" bifurcations using piecewise-linear normal form is carried out.

Conclusion. A bifurcation analysis of a piecewise-smooth irreversible bimodal map of the class $Z_1-Z_3-Z_1$ modeling the dynamics of a pulse-modulated control system is carried out. It is proposed a technique for calculating the parameters of a piecewise linear continuous map used as a normal form. The main bifurcation transitions are calculated when leaving the stability region, both using the initial map and a piecewise linear normal form. The topological equivalence of these maps is numerically proved, indicating the reliability of the results of calculating the parameters of the normal form.

Keywords: piecewise smooth bimodal map of class $Z_1-Z_3-Z_1$; normal form; piecewise linear continuous map; "border collision" bifurcation.

Conflict of interest. The authors declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

For citation: Zhusubaliyev Zh. T., Kuzmina D. S., Yanochkina O. O. Bifurcation Analysis of Piecewise Smooth Bimodal Maps Using Normal Form // *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta = Proceedings of the Southwest State University*. 2020; 24(3): 137-151 (In Russ.). <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2020-24-3-137-151>.

Received 12.05.2020

Accepted 28.05.2020

Published 30.06.2020

Введение

Многие задачи из механики, физики, силовой электроники, теории управления, экономики и биологии приводят к исследованию одномерных необрати-

мых кусочно-гладких бимодальных отображений (рис. 1) [1–6]:

$$x \mapsto F(x),$$

$$F(x) = \begin{cases} F_L(x), & x \leq c_L; \\ F_M(x), & c_L < x < c_R; \\ F_R(x), & x \geq c_R. \end{cases}$$

Здесь $F_L(x)$, $F_M(x)$, $F_R(x)$ – гладкие функции класса C^r , $r \geq 1$. Напомним, что такие отображения имеют два локальных экстремума в точках недифференцируемости – максимум c_L и минимум c_R (рис. 1), которые являются границами («borders») областей определения $F_L(x)$, $F_M(x)$ и $F_R(x)$ [1-6] и называются точками совпадающих прообразов ранга один [6] или многообразиями переключения («switching manifold») [6, 7]. В точках $x = c_L$ и $x = c_R$ функция $F(x)$ недифференцируема.

Локальные экстремумы отображаются в критические точки $c_0 = F_L(c_L)$, $c_1 = F_R(c_R)$, являющиеся образами ранга один точек c_L и c_R , соответственно. Точки c_0, c_1 делят фазовое пространство (фазовую прямую $x \in \mathbb{R}$) на три открытые области $Z_1 = \{x : x < c_1\}$, $Z'_1 = \{x : x > c_0\}$ и $Z_3 = \{x : c_1 < x < c_0\}$, такие, что каждая точка $x \in Z_1$ и $x \in Z'_1$ имеет только один

прообраз ранга один, а точки $x \in Z_3$ — три прообраза ранга один [6, 7].

В кусочно-гладких отображениях возможны разные типы неподвижных точек. Очевидно, что неподвижная точка конкретного типа, удовлетворяющая уравнению

$$F(x) - x = 0,$$

существует только в области определения соответствующей функции.

При вариации параметров, неподвижная точка попадает на одну из границ c_L или c_R , разделяющей области определения функций $F_L(x)$, $F_M(x)$ или $F_M(x)$, $F_R(x)$ (рис. 1). Это приводит к специфическим изменениям топологической структуры фазового пространства из-за нарушения условия существования неподвижной точки [8, 9]. Подобные топологические перестройки фазового пространства названы Nusse Н. Е. и Yorke J. А. «border collision» бифуркациями [10-12].

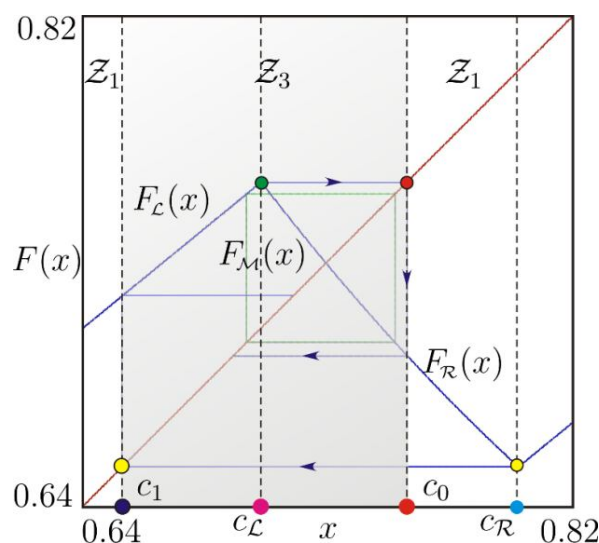


Рис. 1. Бимодальное кусочно-гладкое отображение

Fig. 1. Piecewise-smooth bimodal map

«Border collision» бифуркации могут приводить к чрезвычайно большому многообразию нелинейных явлений, например, к удвоению периода колебаний, одновременному возникновению нескольких сосуществующих аттракторов или рождению из неподвижной точки хаотического аттрактора [2, 3, 4, 6, 10-16].

В представленной работе исследуются бифуркационные явления в кусочно-гладких отображениях класса $Z_1-Z_3-Z_1$ [2, 7] в приложении к теории автоматического управления. Сначала мы рассчитываем область устойчивости неподвижных точек, а затем, изучаем

«border collision» бифуркации, связанные со столкновением инвариантных множеств, например, неподвижных точек с границами области их существования [2, 4, 6, 8-12]. Для этой цели мы используем кусочно-линейное непрерывное отображение в качестве нормальной формы [2, 6, 9, 17, 18]. Основная задача при таком подходе состоит в определении параметров нормальной формы в зависимости от параметров исходной модели [19].

Материалы и методы

Рассмотрим отображение $F: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ вида

$$x \mapsto F(x),$$

$$F(x) = \begin{cases} F_L(x) = e^\lambda x, & x \geq \frac{q}{\Gamma}; \\ F_R(x) = e^\lambda(x-1) + 1, & x \leq \left(\frac{q}{\Gamma} - 1 + e^\lambda - \frac{P}{\Gamma\alpha}\right)e^{-\lambda}; \\ F_M(x) = e^\lambda(x-1) + e^{\lambda(1-z(x))}, & \left(\frac{q}{\Gamma} - 1 + e^\lambda - \frac{P}{\Gamma\alpha}\right)e^{-\lambda} < x < \frac{q}{\Gamma}. \end{cases} \quad (1)$$

Отображение (1) является дискретной моделью системы автоматического управления с широтно-импульсной модуляцией [4, 20].

Здесь x – фазовая переменная; λ – коэффициент затухания; q , P – нормированные сигнал задания и амплитуда опорного сигнала широтно-импульсного модулятора; α – коэффициент усиления; Γ – параметр, связанный с параметрами источника энергии.

Функция $z(x)$, заданная неявно уравнением

$$\varphi(z, x) = \frac{q}{\Gamma} - 1 - (x-1)e^{\lambda z} - \frac{P}{\Gamma\alpha}z = 0, \quad (2)$$

определяет величину относительной длительности импульсов управления согласно модуляционной характеристике. Параметры модели: $P = 20$; $q = 40$; $\lambda = -0,2$; $\alpha > 0$, $\Gamma > 0$ – варьируемые параметры.

Одна из основных задач при проектировании импульсных систем автоматического управления состоит в расчёте области устойчивости рабочих режимов в пространстве параметров. Рабочим режимом рассматриваемого класса импульсных систем являются периодические колебания с периодом модуляции, которые отвечают неподвижной точке

отображения (1). При изменении параметров могут возникать субгармонические колебания или хаотические режимы в результате потери устойчивости или нарушения условия существования неподвижной точки.

Как показано в [4], область устойчивости неподвижной точки отображения (1) ограничена двумя бифуркационными кривыми: линией классической бифуркации удвоения периода и линией «border collision» бифуркации.

Для расчёта границы бифуркации удвоения периода воспользуемся алгоритмом, основанным на поиске периодических режимов методом уравнений периодов. Неподвижная точка отображения (1), отвечающая периодическому режиму с периодом модуляции, удовлетворяет уравнениям:

$$\begin{cases} \frac{q}{\Gamma} - 1 - (x-1)e^{\lambda z} - \frac{P}{\Gamma\alpha}z = 0; \\ e^{\lambda}(x-1) + e^{\lambda(1-z)} - x = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Первое уравнение этой системы – уравнение для коэффициента заполнения импульса z . Второе уравнение – это условие периодичности.

Переменную x в (3) можно исключить. Для этого из второго уравнения (3) выразим x и подставим в первое. В результате, получим трансцендентное уравнение относительно z :

$$\xi(z) = \frac{q}{\Gamma} - \frac{1-e^{\lambda z}}{1-e^{\lambda}} - \frac{P}{\Gamma\alpha}z = 0, \quad 0 \leq z \leq 1. \quad (4)$$

Уравнение (4) называется *уравнением периодов* для неподвижной точки [4, 17]. Пусть z_* — наименьший неотрица-

тельный корень (4). Тогда неподвижная точка x_* находится по формуле [17]

$$x_* = \frac{e^{\lambda(1-z_*)} - e^{\lambda}}{1 - e^{\lambda}}.$$

Локальная устойчивость x_* определяется неравенством

$$-1 < F'_M(x_*) < 1,$$

где

$$F'_M(x) = \frac{\partial F_M(x)}{\partial x} + \frac{\partial F_M(x)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi(z, x) / \partial x}{\partial \varphi(z, x) / \partial z}.$$

Отсюда

$$F'_M(x) = e^{\lambda} + \frac{\lambda e^{\lambda}}{\lambda e^{\lambda z}(x-1) + \frac{P}{\Gamma\alpha}}.$$

Производная $F'_M(x_*)$ называется мультипликатором неподвижной точки. Граница бифуркации удвоения периода отвечает тем значениям параметров, при которых неподвижная точка x_* становится негиперболической с мультипликатором $F'_M(x_*) = -1$. Это негрубое состояние (бифуркационное). Как известно, устойчивость негиперболической неподвижной точки с мультипликатором -1 определяется знаком производной Шварца:

$$SF_M(x_*) = F'''_M(x_*) - \frac{3}{2}[F''_M(x_*)]^2.$$

Неподвижная точка асимптотически устойчива, если $SF_M(x_*) < 0$, и неустойчива, если $SF_M(x_*) > 0$. При переходе через бифуркационное значение параметра происходит удвоение периода колебаний, а неподвижная точка продолжает существовать, но становится неустойчивой.

В зависимости от знака производной Шварца различают два типа бифуркаций удвоения периода: суперкритическую, если $SF_{\mathcal{M}}(x_*) < 0$, и субкритическую, если $SF_{\mathcal{M}}(x_*) > 0$. Субкритическая называется ещё «опасной» или «жёсткой», поскольку при переходе бифуркационного значения параметра происходит внезапная (жёсткая) смена характера динамики.

Дополнив уравнение (4) условием нарушения гиперболичности неподвижной точки, связанного с обращением мультипликатора в -1 , получим

$$\begin{cases} \frac{q}{\Gamma} - \frac{1 - e^{\lambda z}}{1 - e^{\lambda}} - \frac{P}{\Gamma \alpha} z = 0; \\ e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda} / \left(\lambda \cdot \frac{e^{\lambda} - e^{\lambda z}}{1 - e^{\lambda}} + \frac{P}{\Gamma \alpha} \right) = -1. \end{cases} \quad (5)$$

Граница классической бифуркации удвоения периода \mathcal{L}_{FLIP} рассчитана численным решением системы (5). Линию бифуркации «border collision» можно получить аналитически из условия попадания неподвижной точки x_* на левую границу области определения $F_{\mathcal{M}}(x)$ [16]:

$$x_* = c_L = \left(\frac{q}{\Gamma} - 1 + e^{\lambda} - \frac{P}{\Gamma \alpha} \right) e^{-\lambda}.$$

Окрестность правой границы $F_{\mathcal{M}}(x)$ требует отдельного обсуждения. Это мы сделаем в заключительной части работы.

Прежде чем продолжить изложение, остановимся чуть подробнее на решении этой задачи следуя [17]. Из (4)

видно, что функция $\xi(z)$ монотонно убывающая. Отсюда, для существования решения уравнения (4) достаточно выполнения условия $\xi(0)\xi(1) < 0$, т.е.

$$\left(\frac{q}{\Gamma} - 1 - \frac{P}{\Gamma \alpha} \right) \cdot \frac{q}{\Gamma} < 0.$$

Так как $q/\Gamma > 0$, то это неравенство эквивалентно

$$\frac{q}{\Gamma} - 1 - \frac{P}{\Gamma \alpha} < 0.$$

Если

$$\frac{q}{\Gamma} - 1 - \frac{P}{\Gamma \alpha} > 0,$$

то уравнение (4) не имеет решения, что отвечает нарушению условия существования неподвижной точки x_* . Неподвижная точка x_* попадает на границу области определения $F_{\mathcal{M}}(x)$ только при тех значениях параметров, которые удовлетворяют

$$\frac{q}{\Gamma} - 1 - \frac{P}{\Gamma \alpha} = 0.$$

Отсюда, искомая бифуркационная граница [10]:

$$\mathcal{L}_{BCB} = \left\{ (\alpha, \Gamma) : \frac{q}{\Gamma} - 1 - \frac{P}{\Gamma \alpha} = 0 \right\}. \quad (6)$$

Изложенная здесь методика получения \mathcal{L}_{BCB} в точности совпадает с той, которая представлена в [17] для нахождения «border-collision» границы рождения замкнутой инвариантной кривой в двумерном кусочно-гладком отображении и расчёта параметров двумерной нормальной формы.

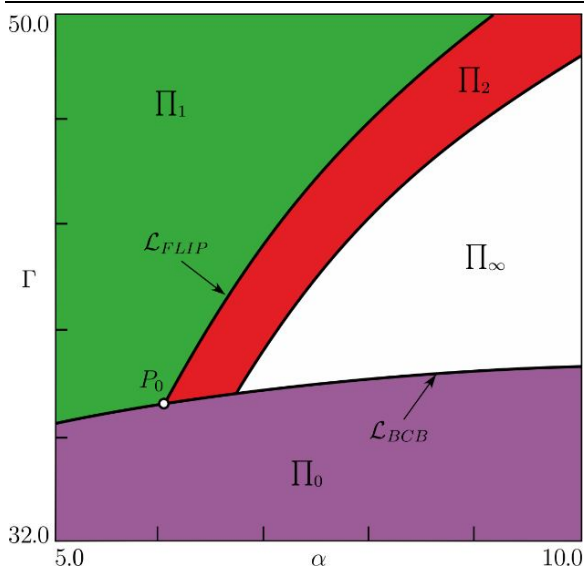


Рис. 2. Двупараметрическая бифуркационная диаграмма на плоскости α , Γ

Fig. 2. Two-dimensional bifurcation diagram in the parameter plane α , Γ

На рис. 2 приведена двупараметрическая бифуркационная диаграмма, на которую нанесены бифуркационные границы \mathcal{L}_{FLIP} и \mathcal{L}_{BCB} , где Π_1 – область устойчивости неподвижной точки F_M ; Π_0 – область устойчивости неподвижной точки F_L ; Π_2 – область устойчивости 2-цикла и Π_∞ – область нерегулярных колебаний. Линия бифуркации удвоения периода \mathcal{L}_{FLIP} опирается на границу \mathcal{L}_{BCB} в точке P_0 коразмерности два.

Координаты точки $P_0 = (\alpha_0, \Gamma_0)$:

$$\alpha_0 = -\frac{P(1+e^\lambda - \lambda \cdot e^\lambda)}{q \cdot \lambda \cdot e^\lambda}, \quad \Gamma_0 = \frac{q \cdot (1+e^\lambda)}{1+e^\lambda - \lambda \cdot e^\lambda}.$$

Результаты и их обсуждение

Задачей бифуркационного анализа с точки зрения практики является выделение участков границы области устойчивости, отвечающих субкритическим

(опасным) бифуркациям. Для участка \mathcal{L}_{FLIP} , где реализуется классическая бифуркация удвоения периода, эта задача решается тривиально.

Что касается границы «border collision» \mathcal{L}_{BCB} , то динамика здесь гораздо сложнее, чем при переходе через линию \mathcal{L}_{FLIP} . Для прогнозирования нелинейных явлений, вызванных «border collision», в одномерных кусочно-гладких непрерывных отображениях часто используют кусочно-линейное непрерывное отображение в качестве нормальной формы [3, 6, 9, 18, 19]. Подход основан на следующем утверждении [6, 18] (см. также [8, 9]).

Утверждение. Рассмотрим семейство одномерных кусочно-гладких непрерывных отображений $F: I \rightarrow I$, $I \subseteq \mathbb{R}$, зависящих от параметра α и определяемое

$$x \mapsto F(\alpha, x). \quad (7)$$

Пусть c_B – многообразие переключения («border») отображения (7). Потребуем, что $x = c_B$ при некотором c_B и, чтобы для этого же самого значения c_B выполнялось условие

$$F(\alpha_*, c_B) - c_B = 0.$$

Определим

$$\alpha_L^* = \left. \frac{\partial F(\alpha_*, x)}{\partial x} \right|_{x=c_B-0}, \quad \alpha_R^* = \left. \frac{\partial F(\alpha_*, x)}{\partial x} \right|_{x=c_B+0}.$$

Тогда в общем случае, «border collision» бифуркация, возникающая в (7) при $\alpha = \alpha_*$, та же самая, что и в кусочно-линейном отображении («skew tent map»)

$$x \mapsto f(x),$$

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_L x + \mu, & \text{если } x < 0; \\ \alpha_R x + \mu, & \text{если } x > 0 \end{cases} \quad (8)$$

при $\mu = 0$ для $(\alpha_L, \alpha_R) = (\alpha_L^*, \alpha_R^*)$.

Заметим, что здесь рассматриваются «border collision» бифуркации, возникающие в точке $\mu = 0$, когда бифуркационный параметр μ меняет знак с «минуса» на «плюс» или наоборот. В общем случае в качестве бифуркационного можно выбрать любой из трех параметров α_L , α_R , μ [6, 18].

Далее покажем, что все параметры нормальной формы (8) являются функциями параметров отображения (1) и обладают желаемой степенью гладкости.

Начнем с небольшого предварительного замечания. Мультипликатор $F'_L(x_*) = e^\lambda$ неподвижной точки $x_* = c_L$, где $c_L = \left(\frac{q}{\Gamma} - 1 + e^\lambda - \frac{P}{\Gamma\alpha} \right) e^{-\lambda}$, удовлетворяющей $F_L(x) - x = 0$, всегда $0, 0 < F'_L(x_*) < 1, 0$ и, следовательно, x_*

устойчива. Несложно показать, что на линии \mathcal{L}_{BCB} неподвижная точка x_* равна $x_* = c_L = 1, 0$. Мультипликатор другой неподвижной точки $x_* = c_R$, которая есть корень уравнения $F_R(x) - x = 0$, равен той же величине $F'_R(x_*) = e^\lambda$. Однако решение этого уравнения должно удовлетворять еще и условию $q/\Gamma = 0, 0$. Но это условие относится ко второй «border-collision» бифуркационной границе. С другой стороны, очевидно, что $q/\Gamma = 0, 0$ только тогда, когда $\Gamma = \infty$, что физически нереализуемо. Это означает, что в рассматриваемой модели «border collision» бифуркации возникают, когда неподвижная точка пересекает многообразие переключения c_L , отвечающей границе, разделяющей области определения функций $F_L(x)$ и $F_M(x)$. Но в случае периодических орбит, надо рассматривать обе границы.

Положив $c_B = c_L$, найдем:

$$\alpha_L = \frac{\partial F(\alpha, x)}{\partial x} \Big|_{x=c_B-0} = \frac{\partial F_L(\alpha, x)}{\partial x} \Big|_{x=c_B-0} = e^\lambda, \quad (9)$$

$$\alpha_R = \frac{\partial F(\alpha, x)}{\partial x} \Big|_{x=c_B+0} = \frac{\partial F_M(\alpha, x)}{\partial x} \Big|_{x=c_B+0} = e^\lambda + \frac{\lambda e^\lambda \Gamma \alpha}{P},$$

$$\mu = \frac{\partial F(\alpha_*, x)}{\partial \alpha} (\alpha - \alpha_*), \text{ где } \begin{cases} \mu < 0, & \text{если } \alpha < \alpha_*; \\ \mu > 0, & \text{если } \alpha > \alpha_*; \\ \mu = 0, & \text{если } \alpha = \alpha_*, \end{cases}$$

$$\frac{\partial F(\alpha, x)}{\partial \alpha} = \frac{P}{\Gamma \alpha^2} > 0.$$

Коэффициенты α_L и α_R рассчитываются для значений α и Γ , лежащих на линии L_{BCB} , т.е. удовлетворяющих

$$\frac{q}{\Gamma} - 1 - \frac{P}{\Gamma\alpha} = 0.$$

Фазовое пространство отображения (8) делится на две области $L = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$; $R = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Неподвижные точки в областях L и R

$$x_L^* = \frac{\mu}{1 - \alpha_L} \leq 0 \text{ и } x_R^* = \frac{\mu}{1 - \alpha_R} \geq 0.$$

Поскольку «border collision» бифуркация возникает при $\mu = 0$, то в точке бифуркации получаем $x_L^* = x_R^* = 0$. Устойчивость $x_{L/R}^*$ определяется коэффициентами α_L , α_R : неподвижная точка $x_{L/R}^*$ устойчива, если $|\alpha_{L/R}| < 1,0$ и неустойчива, если $|\alpha_{L/R}| > 1,0$. Классификация возможных бифуркаций в (8) и детальная бифуркационная диаграмма на плоскости параметров (α_L, α_R) приведены в [6, 9, 18].

Из (9) видно, что коэффициент α_L не зависит от параметров α , Γ отображения (1): $\alpha_L = e^\lambda \approx 0,81873$ (см. (9)). На участке границы L_{BCB} , расположенном слева от точки P_0 , угловой коэффициент α_R по абсолютной величине меньше единицы. Так как в этом случае $|\alpha_{L/R}| < 1,0$, то «border collision» переход называется «persistence» [13], означающий то, что устойчивая неподвижная точка одного типа переходит в устойчивую неподвижную точку другого типа (в [8, 9] он назван бифуркацией «простого изменения типа решения»).

На другом участке L_{BCB} , расположенном справа от P_0 , параметр $|\alpha_R| > 1,0$. В этом случае, в зависимости от величины α_R можно наблюдать большое многообразие нелинейных явлений, например, удвоение или умножение периода колебаний, рождение многополостного хаотического аттрактора в результате единственной бифуркации (за подробностями отсылаем к [6, 18]).

В заключение нашего обсуждения приведём несколько иллюстративных примеров, показывающих роль нормальной формы (8) в прогнозировании нелинейных явлений в кусочно-гладком отображении (1).

На рис. 3,а приведена бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая бифуркацию удвоения периода при переходе из области Π_0 в область Π_2 через границу L_{BCB} при $\alpha = 6,7$. На рис. 3,б показаны результаты исследований с помощью нормальной формы (8) для $\alpha_R \approx -1,21172$. Значение коэффициента $\alpha_R \approx -1,21172$ отвечает точке, лежащей на границе L_{BCB} при $\alpha = 6,7$. На рис. 3,в-д показаны итерационные диаграммы, показывающие бифуркационный переход.

Известия Юго-Западного государственного университета / Proceedings of the Southwest State University. 2020; 24(3): 137-151

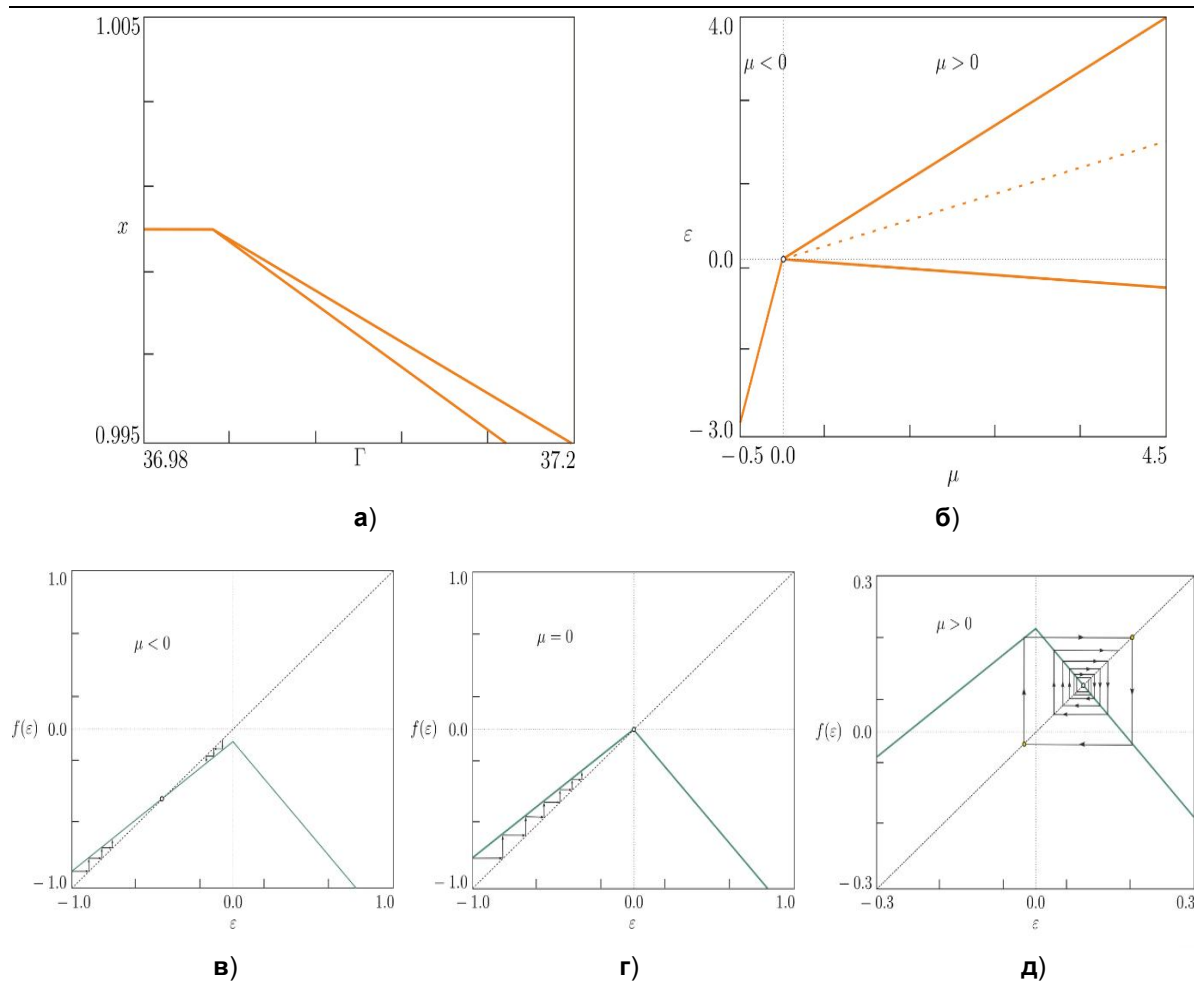


Рис. 3. Удвоение периода колебаний при $\alpha=6,7$: **а** – бифуркационная диаграмма для кусочно-гладкого отображения (1); **б** – бифуркационная диаграмма для нормальной формы (8). Параметры нормальной формы соответствуют $\alpha=6,7$: $\alpha_{\text{н}} \approx -1,21172$; **в-д** – итерационные диаграммы, иллюстрирующие динамику до, в точке и после бифуркации

Fig. 3. Period-doubling of oscillations for $\alpha=6,7$: **а** – Bifurcation diagram for the piecewise-smooth map (1); **б** – Bifurcation diagram for the normal form map (8). Parameters of the normal form map correspond to $\alpha=6,7$: $\alpha_{\text{н}} \approx -1,21172$; **в-д** – cobweb diagrams illustrating the dynamics before, at and after the bifurcation point

Как видно из этой диаграммы, в точке бифуркации $\mu=0,0$ существует асимптотически устойчивая неподвижная точка $x_{\mathcal{L}}^* = x_{\mathcal{R}}^* = 0$. После бифуркации при $\mu > 0,0$ возникают неустойчивая неподвижная точка $x_{\mathcal{L}}^*$ и устойчивый цикл с периодом 2, причем, при

$\alpha_{\mathcal{R}} \approx -1,21172$, одна точка 2-цикла находится в области \mathcal{L} , а другая — в области \mathcal{R} (см. рис. 3(д)). На рис. 4 изображен бифуркационный переход, при котором из неподвижной точки возникает однополостный хаотический аттрактор.

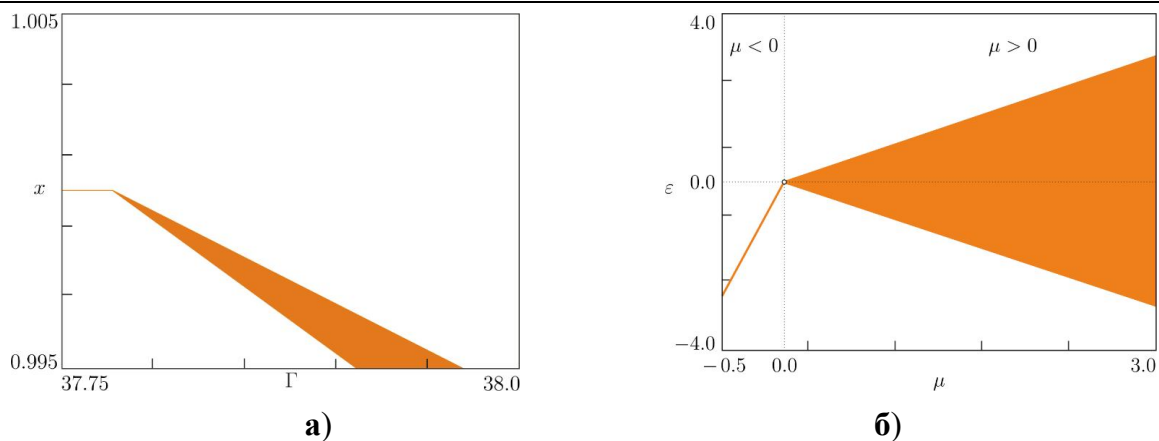


Рис. 4. Рождение однополостного хаотического аттрактора при $\alpha = 8$: **а** – Бифуркационная диаграмма для (1); **б** – Бифуркационная диаграмма для (8): $\alpha_{\text{гр}} \approx -1,63746$

Fig. 4. Birth of a single-band chaotic attractor, $\alpha = 8$: **a** – Bifurcation diagram for (1); **b** – Bifurcation diagram for (8), $\alpha_{\text{gr}} \approx -1,63746$

Выводы

В представленной работе выполнен бифуркационный анализ бимодального кусочно-гладкого отображения, описывающего поведение импульсной системы автоматического управления. В плоскости параметров построена граница области устойчивости неподвижной точки, отвечающей периодическим колебаниям с периодом модуляции.

Показано, что область устойчивости неподвижной точки ограничена двумя

бифуркационными кривыми: линиями классической бифуркации удвоения периода и «border collision» бифуркации. Описаны методики расчёта бифуркационных кривых и определения параметров нормальной формы как функции параметров исходного кусочно-гладкого отображения.

Приведены примеры, демонстрирующие роль кусочно-линейного непрерывного отображения в прогнозировании нелинейных явлений в кусочно-гладких динамических системах.

Список литературы

1. Sharkovsky A., Kolyada S., Sivak A., Fedorenko V. Dynamics of One-dimensional Maps. Dordrecht: Springer; 1997. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-8897-3>
2. Bifurcations of attracting cycles from delayed Chua's circuit / Yu. L. Maistrenko, V. L. Maistrenko, S. U. Vikil, L. O. Chua // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 1995. № 5 (3). P. 653–671. <https://doi.org/10.1142/S021812749500051X>
3. Bifurcations in one-dimensional piecewise smooth maps: Theory and applications in switching circuits / S. Banerjee, M. S. Karthik, G. Yuan, J. A. Yorke // *IEEE Trans. Circ. and Sys. I*. 2000. № 47 (3). P. 389–394. <https://doi.org/10.1109/81.841921>

4. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. *Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems*. Singapore: World Scientific; 2003. <https://doi.org/10.1142/5313>
5. Panchuk A., Sushko I., Schenke B., Avrutin V. Bifurcation structures in a bimodal piecewise linear map: regular dynamics. *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2013, № 23 (12). P. 1330040. <https://doi.org/10.1142/S0218127413300401>
6. *Continuous and Discontinuous Piecewise-Smooth One-Dimensional Maps: Invariant Sets and Bifurcation Structures* / V. Avrutin, L. Gardini, I. Sushko, F. Tramontana // Singapore: World Scientific. 2019. <https://doi.org/10.1142/8285>
7. *Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Noninvertible Maps* / C. Mira, L. Gardini, A. Barugola, J. C. Cathala // Singapore: World Scientific; 1996. <https://doi.org/10.1142/2252>
8. Feigin M. I. Doubling of the oscillation period with C-bifurcations in piecewise continuous systems // *J. Appl. Math. Mech.* 1970. №34 (5). P. 822 – 830. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(70\)90064-X](https://doi.org/10.1016/0021-8928(70)90064-X)
9. Local analysis of C-bifurcations in n-dimensional piecewise-smooth dynamical systems / di M. Bernardo, M. I. Feigin, S. J. Hogan, M. E. Homer // *Chaos, Solitons and Fractals*. 1999. №10 (11). P. 1881 – 1908. [https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(98\)00317-8](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(98)00317-8)
10. Nusse H. E., Yorke J. A. Border-collision bifurcations including “period two to period three” for piecewise smooth systems // *Physica D*. 1992. № 57 (1-2). P. 39 – 57. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(92\)90087-4](https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90087-4)
11. Nusse H. E., Yorke J. A. Border collision bifurcation: an explanation for observed bifurcation phenomena // *Physical Review E*. 1994. № 49. P. 1073-1076. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.49.1073>
12. Nusse H. E., Yorke, J. A. Border-collision bifurcations for piecewise smooth one dimensional maps // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 1995. № 5 (1). P. 189–207. <https://doi.org/10.1142/S0218127495000156>
13. *Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications* / M. di Bernardo, C. J. Budd, A. R. Champneys, P. Kowalczyk. London: Springer-Verlag, 2008. <https://doi.org/10.1007/978-1-84628-708-4>
14. Dangerous bifurcations revisited / V. Avrutin, Zh. T. Zhusubaliyev, A. Saha, S. Banerjee, I. Sushko, L. Gardini // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2016. № 26 (14). P. 1630040 (24 pages). <https://doi.org/10.1142/S0218127416300408>
15. Transitions from phase-locked dynamics to chaos in a piecewise-linear map / Zh. T. Zhusubaliyev, E. Mosekilde, S. De, S. Banerjee // *Physical Review E*. 2008. № 77. P. 026206. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.77.026206>
16. Border collision route to quasiperiodicity: Numerical investigation and experimental confirmation / Zh. T. Zhusubaliyev, E. Mosekilde, S. Maity, S. Mohanan, S. Banerjee // *Chaos*. 2006. № 16(2). P. 023122. <https://doi.org/10.1063/1.2208565>

17. Sushko I., Avrutin V., Gardini L. Bifurcation structure in the skew tent map and its application as a border collision normal form // *Journal of Difference Equations and Applications*. 2016. №22(8). P.1040–1087. <http://dx.doi.org/10.1080/10236198.2015.1113273>
18. Sushko I., Gardini L., Avrutin V. Nonsmooth one-dimensional maps: some basic concepts and definitions // *Journal of difference equations and applications*. 2016. № 22 (12). P. 1816-1870. <http://dx.doi.org/10.1080/10236198.2016.1248426> .
19. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. Equilibrium-torus bifurcation in nonsmooth systems. *Physica D*. 2008. №237(7). P. 930 – 936. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2007.11.019>
20. Onset of chaos in a single-phase power electronic inverter / V. Avrutin, E. Mosekilde, Zh. T. Zhusubaliyev, L. Gardini // *Chaos*. 2015. №25 (4). P. 043114-1 – 043114-14. <https://doi.org/10.1063/1.4918299>

References

1. Sharkovsky A., Kolyada S., Sivak A., Fedorenko V. *Dynamics of One-dimensional Maps*. Dordrecht: Springer; 1997. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-8897-3>
2. Maistrenko Yu. L., Maistrenko V. L., Vikil S. U., Chua L. O. Bifurcations of attracting cycles from delayed Chua's circuit. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1995, no.5 (3), pp. 653–671. <https://doi.org/10.1142/S021812749500051X>
3. Banerjee S., Karthik M. S., Yuan G., Yorke J. A. Bifurcations in one-dimensional piecewise smooth maps: Theory and applications in switching circuits. *IEEE Trans. Circ. and Sys. I*, 2000, no. 47 (3), pp. 389–394. <https://doi.org/10.1109/81.841921>
4. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. *Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems*. Singapore: World Scientific, 2003. <https://doi.org/10.1142/5313>
5. Panchuk A., Sushko I., Schenke B., Avrutin V. Bifurcation structures in a bimodal piecewise linear map: regular dynamics. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2013, no. 23 (12), 1330040 p. <https://doi.org/10.1142/S0218127413300401>
6. Avrutin V., Gardini L., Sushko I., Tramontana F. *Continuous and Discontinuous Piecewise-Smooth One-Dimensional Maps: Invariant Sets and Bifurcation Structures*. Singapore: World Scientific, 2019. <https://doi.org/10.1142/8285>
7. Mira C., Gardini L., Barugola A., Cathala J. C. *Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Noninvertible Maps*. Singapore: World Scientific, 1996. <https://doi.org/10.1142/2252>
8. Feigin M. I. Doubling of the oscillation period with C-bifurcations in piecewise continuous systems. *J. Appl. Math. Mech*, 1970, no. 34 (5), pp. 822 – 830. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(70\)90064-X](https://doi.org/10.1016/0021-8928(70)90064-X)

9. di Bernardo M., Feigin M. I., Hogan S. J., Homer M. E. Local analysis of C-bifurcations in n-dimensional piecewise-smooth dynamical systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 1999, no. 10 (11), pp. 1881 – 1908. [https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(98\)00317-8](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(98)00317-8).
10. Nusse H. E., Yorke J. A. Border-collision bifurcations including “period two to period three” for piecewise smooth systems. *Physica D*. 1992, no. 57 (1-2), pp. 39 – 57. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(92\)90087-4](https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90087-4)
11. Nusse H. E., Yorke J. A. Border collision bifurcation: an explanation for observed bifurcation phenomena. *Physical Review E*, 1994, no. 49, pp. 1073-1076. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.49.1073>
12. Nusse H. E., Yorke, J. A. Border-collision bifurcations for piecewise smooth one dimensional maps. *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 1995, no. 5 (1), pp. 189–207. <https://doi.org/10.1142/S0218127495000156>
13. di Bernardo M., Budd C. J., Champneys A. R., Kowalczyk P. *Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*. London: Springer-Verlag, 2008. <https://doi.org/10.1007/978-1-84628-708-4>
14. Avrutin V., Zhusubaliyev Zh. T., Saha A., Banerjee S., Sushko I., Gardini L. Dangerous bifurcations revisited. *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2016, no. 26 (14), 1630040 p. (24 pages). <https://doi.org/10.1142/S0218127416300408>
15. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., De S., Banerjee S. Transitions from phase-locked dynamics to chaos in a piecewise-linear map. *Physical Review E*, 2008, no. 77, 026206 p. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.77.026206>
16. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., Maity S., Mohanan S., Banerjee S., Border collision route to quasiperiodicity: Numerical investigation and experimental confirmation. *Chaos*, 2006, no. 16(2), 023122 p. <https://doi.org/10.1063/1.2208565>
17. Sushko I., Avrutin V., Gardini L. Bifurcation structure in the skew tent map and its application as a border collision normal form. *Journal of Difference Equations and Applications*, 2016, no. 22(8), pp. 1040–1087. <http://dx.doi.org/10.1080/10236198.2015.1113273>
18. Sushko I., Gardini L., Avrutin V. Nonsmooth one-dimensional maps: some basic concepts and definitions. *Journal of difference equations and applications*. 2016, no. 22 (12), pp. 1816-1870. <http://dx.doi.org/10.1080/10236198.2016.1248426> .
19. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. Equilibrium-torus bifurcation in nonsmooth systems. *Physica D*. 2008, no. 237(7), pp. 930 – 936. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2007.11.019>
20. Avrutin V., Mosekilde E., Zhusubaliyev Zh. T., and Gardini L. Onset of chaos in a single-phase power electronic inverter. *Chaos*, 2015, no. 25 (4), pp. 043114-1 – 043114-14. <https://doi.org/10.1063/1.4918299>

Информация об авторах / Information about the Authors

Жусубалиев Жаныбай Турсунбаевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной техники, ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск, Российская Федерация, e-mail: zhanybai@gmail.com, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5534-9902>

Zhanybai T. Zhusubaliyev, Dr. of Sci. (Engineering), Professor, Department of Computer Science, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: zhanybai@gmail.com, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5534-9902>

Кузьмина Дарья Сергеевна, магистр кафедры вычислительной техники, ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск, Российская Федерация, e-mail: dariakosmo@gmail.com

Daria S. Kuzmina, Master Student of the Department of Computer Science, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: dariakosmo@gmail.com

Яночкина Ольга Олеговна, кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительной техники, ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск, Российская Федерация, e-mail: yanoolga@gmail.com

Olga O. Yanochkina, Cand. of Sci. (Engineering), Associate Professor, Department of Computer Science, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: yanoolga@gmail.com