Оригинальная статья / Original article

https://doi.org/10.21869/2223-1560-2019-23-5-129-144

Оценка влияния эффекта системности на результативность антагонистических игр

А.Р. Гайдук [1] ✉, В.Х. Пшихопов [1], М.Ю. Медведев [1], В.С. Плаксиенко [1], Д.Н. Гонтарь [1]

[1] ФГАБУ «Южный федеральный университет»
пер. Некрасовский, д. 44, г. Таганрог, 347920, Российская Федерация

✉ e-mail: gaiuk_2003@mail.ru

Резюме

***Цель исследования**. Данная работа посвящена оценке влияния свойства системности на результативность антагонистических игр нескольких участников, которые проводят игру, действуя совместно или несовместно.*

***Методы**. При исследовании применяются уравнения Колмогорова для описания антагонистических игр, которые рассматриваются как динамические системы, в которых протекают случайные марковские процессы; аналитические и компьютерные методы решения дифференциальных уравнений и исследования их свойств.*

***Результаты**. Итог игры при несовместных действиях игроков рассматривается как результат множества независимых событий, в то время как результат игры, обусловленный совместными действиями игроков, рассматривается как результат функционирования некоторой динамической системы. На основе такого подхода показано, что увеличение результативности совместных действий, по сравнению с несовместными, обусловлено системным эффектом и может быть охарактеризовано коэффициентом системности. Численные оценки коэффициента системности получены путем аналити-ческих решений «уравнений средних» и компьютерных решений уравнений Колмогорова. Полученные результаты могут применяться для практической оценки эффективности различных методов подготовки участников и проведения антагонистических игр, в том числе и в учебных заведениях.*

***Заключение.** В статье предложен новый метод количественной оценки результативности антагонистических игр, спортивных состязаний с постоянной отдачей участников. Показано, что выигрывает антагонистическую игру та сторона, игроки которой проявляют большую отдачу. Продолжительность такой игры зависит от её параметров, т.е. от отдачи игроков. При этом, чем более ожесточённее, с большей отдачей игроков, протекает игра, тем короче её длительность. Коэффициент системности в основном определяется отношением отдач игроков противостоящих сторон. При равенстве отдач в игре одного игрока с двумя коэффициент системности близок к значению 1,30. С увеличением отдачи игрока первой стороны коэффициент системности увеличивается. Другими словами, чем сильнее сопротивление, тем выше коэффициент системности.*

Ключевые слова: *игра; игрок; спортсмен; потенциал; совместное действие; несовместное действие; множество; система; системный эффект; коэффициент системности.*

Конфликт интересов: *Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.*

Финансирование: *Публикация подготовлена в рамках реализации в НИИ робототехники и процессов управления ЮФУ гранта РНФ 16-19-00001.*

Для цитирования: Оценка влияния эффекта системности на результативность антагонистических игр / А.Р. Гайдук, В.Х. Пшихопов, М.Ю. Медведев, В.С. Плаксиенко, Д. Н. Гонтарь // Известия Юго-Западного государственного университета. 2019; 23(5): 129-144. https://doi.org/10.21869/2223-1560-2019-23-5-129-144.

Статья поступила в редакцию 02.09.2019

Статья подписана в печать 30.09.2019

Статья опубликована 25.10.2019

Influence Estimation of the Systemic Effect on Performance Antagonistic Games

Anatoly R. Gaiduk [1] ✉, Vyacheslav Kh. Pshikhopov [1], Mikhail Yu. Medvedev [1], Vladimir S. Plaksienko [1], Dmitriy N. Gontar [1]

[1] Southern Federal University
44 Nekrasovsky str., Taganrog 347920, Russian Federation

✉ e-mail: gaiuk_2003@mail.ru

Abstract

Perpose of research. *The estimation problem of the influence of the systemic effect on the performance of the antagonistic games of several participants, who play the game, acting in various ways, is considered. It is assumed, that players play games, match through independent, incompatible actions, or through concerted, joint actions.*
Methods. *It is obvious that joint actions provide greater efficiency, but such a qualitative estimation is often not enough. For informed decision making, as a rule, quantitative estimations are required.*
Results. *The analytical and computer solutions of the well-known equations describing the state of dynamic systems in which random Markov processes occur are used to obtain quantitative estimates. The result of incompatible actions of the players is considered as the result of many independent events, while the process due to the combined actions of the players appears to be the result of the functioning of some dynamic system. The increase in the productivity of joint actions of players compared with incompatible actions is considered to be a consequence of the organization of several players as a dynamic system, and is called the system effect. Analytical solutions of the "dynamics of averages" equations obtained earlier by Russian and foreign mathematicians are used for a quantitative, approximate estimation of the influence of the systemic effect. The exact Kolmogorov equations describing changes in the probabilities of the state of dynamical systems with random processes were solved by computer methods using MATLAB. These decisions made it possible to obtain estimates of the numerical values of the coefficient of systemicity, which characterizes the effectiveness of joint actions compared to incompatible ones.*
Conclution. *The results obtained in the article can be used to estimate the performance of the various training methods of participants in antagonistic games, athletes, and in educational institutions.*

***Keywords**: game; player; potential; joint action; incompatible action; set; system; systemic effect; coefficient of systemicity.*

***Conflict of interest.** The Author declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.*

***Financing:** The publication was prepared in the framework of the implementation of the grant RPF 16-19-00001 in the research Institute of robotics and management processes of SFU.*

For citation: *Gaiduk A.R., Pshikhopov V.Kh., Medvedev M.Yu., Plaksienko V.S., Gontar D.N.* Influence Estimation of the Systemic Effect on Performance Antagonistic Games. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta = Proceedings of the Southwest State University*. 2019, 23(5): 129-144 (In Russ.). https://doi.org/ 10.21869/2223-1560-2019-23-5-129-144.

Received 02.09.2019

Accepted 30.09.2019

Published 25.10.2019

***

Введение

В современном мире встречается множество различных задач, конфликтных ситуаций, которые решаются сторонами на основе различных подходов, но каждая из сторон стремится к выигрышу. Это могут быть экономические, социальные и, в частности, спортивные состязания или игровые задачи, состоящие в противоборстве двух сторон [1 – 9]. Среди этих задач выделим антагонистические игры, которые могут решаться несколькими игроками двух сторон, действующими различным образом. В одном случае, каждый игрок совершает свои действия независимо, не согласовывая их с действиями других игроков своей команды. В этом случае можно выделить множество пар взаимодействующих во времени игроков, причем каждую пару можно считать динамической системой, так как игра протекает во времени [2 – 5]. В другом случае, игроки каждой стороны решают задачу путем совершения (выполнения) согласованных действий (например, при коллективной игре в футбол) [6 – 9], т.е. в этом случае действия каждого игрока зависят от действий других игроков своей команды и также направлены на решение общей задачи. Такие действия игроков, очевидно, являются совместными, а игра в целом является динамической системой.

Известно, что эффективность согласованных совместных действий выше, по сравнению с аналогичными, но несогласованными, несовместными действиями [7, 9, 10]. Однако для принятия решений качественных оценок недостаточно. Так, при подготовке участников игр, в частности – спортсменов в учебных заведениях, возникает необходимость количественных оценок их подготовленности, в том числе и к коллективным действиям. С этой целью обычно используется аттестационный педагогический измерительный материал (АПИМ), важное место в котором занимают математическое моделирование и тестирование [1, 10 – 13].

При несовместных действиях игра, фактически, распадается на множество локальных динамических систем, в которых совершаются независимые случайные события. Следовательно, результат такой игры является результатом объединения результатов *случайных*, *независимых событий* [14 –16]. В то же время при совместных действиях игроков каждой стороны игра в целом представляется единой динамической системой, в которой протекает также случайный процесс. В играх рассматриваемого типа поведение игроков обычно представляет собой некоторую последовательность кратковременных взаимодействий друг с другом (футбол, бокс, теннис и т.п.), поэтому такие игры можно считать *марковскими процессами*. Как известно, эти процессы в динамических системах описываются уравнениями Колмогорова или следствиями из них [15, 17 – 19].

Большую эффективность согласованных совместных действий по сравнению с несовместными принято считать проявлением системного эффекта. Для количественной оценки влияния системного эффекта применяется, так называемый, «коэффициент системности» [19, 20]. В общем случае он может определяться различными способами, но всегда отражает превышение результата совместных действий над результатом аналогичных, но не совместных действий.

Целью данного исследования является оценка возможных численных значений коэффициента системности с применением как приближенных, аналитических решений, так и более точных компьютерных решений дифференциальных уравнений, являющихся математическими моделями игр. Представляется существенным выявление связи системного эффекта с параметрами антагонистической игры как динамической системы.

Постановка задачи и методы исследования

Способы ведения и описания антагонистических игр

Спортивные и многие другие антагонистические игры характеризуются тем, что принимающие в них участие игроки в процессе игры истощают свои возможности, и чаще всего одна из сторон терпит поражение. Имея это в виду, предположим, что игрок-1 располагает некоторым потенциалом (физическим, финансовым, информационным и т.п.) и в процессе игры с игроком-2 тратит его с некоторой с интенсивностью (отдачей) a_1. Это может быть, например, сила определенной величины; ставки в виде некоторой суммы и т.п. Аналогично, игрок-2 тратит свой потенциал с отдачей a_2 так, что потенциалы, выделяемые игроками, взаимно поглощаются [1, 2, 14, 20]. С целью формализации описания игры примем, что способность каждого i-го игрока продолжать игру в момент времени t определяется *вероятностью* $p_i(t)$ *наличия* у него неравного нулю потенциала. Если в момент начала игры i-ым игроком эта вероятность $p_i(0) = 1$, то в процессе игры его потенциал снижается; снижается и его способность продолжать игру, то есть снижается вероятность $p_i(t)$. Соответственно, вероятность проигрыша i-ым игроком $q_i(t) = 1 - p_i(t)$ с течением времени повышается. Другими словами, если вероятность $p_i(t)$ не равна нулю или если $q_i(t)$ меньше 1, то у i-го игрока в момент времени t имеется некоторый потенциал, т.е. он способен продолжать игру.

Так как непосредственные взаимодействия игроков осуществляются достаточно редко и кратковременно, то игру можно рассматривать как пуассоновский поток событий, что позволяет найти дифференциальные уравнения для вероятностей возможности вести игру с обеих сторон [1, 17, 16]. Антагонистическую игру можно также рассматривать как марковский процесс изменения состояний игры [14, 19]. Подобные антагонистические игры можно описать дифференциальными уравнениями Колмогорова, которые связывают динамику вероятностей состояния игроков [15, 18, 19].

Далее дифференциальные уравнения Колмогорова используются для описания антагонистической игры одного игрока против двух игроков, а также вытекающие из них линейные «уравнения средних» [19, 20]. Эти уравнения могут описывать как совместные, так и несовместные действия игроков, что позволяет получить количественную оценку коэффициента системности.

Рассмотрим антагонистическую игру (1:2), в которой один игрок первой стороны противостоит двум игрокам второй стороны, равным друг другу по отдаче. Причем, в первом случае, эти два игрока ведут игру несогласованно, несовместно, т.е. каждый из них действует так, как будто его компаньона не существует. Во втором случае, два игрока, противостоящие одному, действуют совместно. Рассмотрим сначала первый случай.

Исследование игры при несовместных действиях игроков

Поскольку действия игроков второй стороны несовместны, то будем считать, что рассматриваемая игра представляет две независимые игры 1:1, в каждой из которых принимают участие по два игрока. Как показано выше каждая из этих игр представляет собой пуассоновский поток событий, поэтому каждая из них описывается системой дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\dot{p}_1(t) = -a_2(t)p_1(t)p_2(t), \tag{1}$$

$$\dot{p}_2(t) = -a_1(t)p_1(t)p_2(t), \tag{2}$$

где $p_i(t)$ – вероятность возможности i-го игрока вести игру 1:1; $a_i(t)$ – отдача i-го игрока. Начальные значения $p_i(0) = 1$, $i = 1, 2$. Игра заканчивается, когда одна из вероятностей $p_1(t)$ или $p_2(t)$ обратится в нуль или примет некоторое малое значение [17, 19, 20].

В рассматриваемой ситуации, когда каждый игрок второй стороны действует независимо от компаньона, результаты игр (1), (2), которые ведутся каждым игроком второй стороны, являются независимыми случайными событиями. Поэтому, согласно [14], вероятность того, что игрок первой стороны в момент времени способен продолжать игру 1:2 против двух игроков, имеющих равные возможности, т.е. $a_{21} = a_{22} = a_2$, но действующих несовместно, определяется выражением

$$p_{1H}(t) = p_1^2(t). \qquad (3)$$

При переменных $a_i(t)$ аналитическое решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (1), (2) найти достаточно сложно, поэтому в данной работе рассматривается случай постоянных значений $a_i(t)$, т.е. при $a_1(t) = a_1 = const$ и $a_2(t) = a_2 = const$.

Переходя к решению системы (1), (2) при постоянных значениях a_i, выполним замену переменных, полагая $q_1(t) = \ln p_1(t)$, $q_2(t) = \ln p_2(t)$. Тогда система (1), (2) перейдёт в систему

$$\dot{q}_1(t) = -a_2 e^{q_2(t)}, \quad \dot{q}_2(t) = -a_1 e^{q_1(t)}. \qquad (4)$$

Из первого уравнения (4) имеем $\ddot{q}_1(t) = -a_2 e^{q_2(t)} \dot{q}_2(t)$. Заменяя в этом равенстве функцию $e^{q_2(t)}$ её выражением из первого уравнения (4), получим с учетом второго уравнения (4):

$$\ddot{q}_1(t) = -a_1 d e^{q_1(t)} / dt. \qquad (5)$$

Отсюда следует $\dot{q}_1(t) = -a_1 e^{q_1(t)} + C_1$ или в исходных обозначениях $\dot{p}_1(t) = [-a_1 p_1(t) + C_1] p_1(t)$. С учетом начальных условий $p_i(0) = 1$, $i = 1, 2$, из первого уравнения (1) выводим $\dot{p}_1(0) = -a_2$, что даёт: $C_1 = a_1 - a_2$. Таким образом, $\dot{p}_1(t) = [-a_1 p_1(t) + a_1 - a_2] p_1(t)$. Интегрируя это дифференциальное уравнение, будем иметь $p_1(t) = (a_1 - a_2) / (a_1 + C_2 e^{(a_2 - a_1)t})$. Здесь C_1, C_2 – постоянные интегрирования, поэтому с учетом условия $p_1(0) = 1$, получим $C_2 = -\lambda_2$. Таким образом решение системы (1), (2) имеет вид

$$p_1(t) = \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_2 e^{(a_2 - a_1)t}},$$

$$p_2(t) = \frac{a_2 - a_1}{a_2 - a_1 e^{(a_1 - a_2)t}}. \qquad (6)$$

Второе выражение (6) получается аналогично первому, если в начале описанных преобразований найти $\ddot{q}_2(t)$. В частном случае, когда $a_1 = a_2 = a$ оба выражения (6) принимают вид

$$p_2(t) = p_1(t) = \frac{1}{1 + at}. \qquad (7)$$

Таким образом, вероятность способности игроков продолжать игру 1:1 в момент времени t определяется либо выражениями (6) при $a_1 \neq a_2$, либо выражением (7) при $a_1 = a_2 = a$. Подставляя значение $p_1(t)$ из (6) и (7) в равенство (3), получим

$$p_{1\text{Н}}(t) = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_2 e^{(a_2 - a_1)t}} \right)^2, \quad a_1 \neq a_2, \qquad a_1 = a_2 = a, \qquad (8)$$

и

$$p_{1\text{Н}}(t) = \frac{1}{(at+1)^2},$$

$$a_1 = a_{21} = a_{22} = a. \qquad (9)$$

Из выражений (8), (9) следует, что вероятность способности игрока первой стороны продолжать игру 1:2 при *несовместных* действиях, противостоящих ему двух игроков, с течением времени уменьшается, что соответствует действительности [20].

Замечание 1. Пусть $a_2 = a_1 + \alpha$, где малое число $\alpha > 0$, тогда из выражений (6) – (9) следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} p_1(t) = 0$, а $\lim\limits_{t\to\infty} p_2(t) = \alpha / a_1 + \alpha > 0$. Так как значение $p_1(t) = 0$ достигается лишь при $t = \infty$, то примем, что $\alpha > 0,053a_1$, а игры 1:1 и 1:2 заканчиваются, когда вероятность p_1 становится равной 5% от начальной. При этом продолжительность $t_{\text{и}1}$ игры 1:1 определится из уравнения $p_1(t_{\text{и}1}) = 0,05$. Отсюда с учетом выражений (6) выводим:

$$t_{\text{и}1} = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{0,05a_1 + \alpha}{0,05(a_1+\alpha)},$$

$$p_2(t_{\text{и}1}) > 0,05. \qquad (10)$$

Следовательно, в одиночной игре 1:1 терпит поражение более слабый игрок, что, очевидно, соответствуют естественному ходу антагонистических игр.

В случае игры одного игрока с двумя одинаковыми по отдаче и более сильными игроками, но действующими *несовместно*, т.е. при $a_{21} = a_{22} = a_1 + \alpha$, из выражения (8) и условия $p_{1\text{Н}}(t_{\text{и}2\text{Н}}) = 0,05$ следует выражение

$$t_{\text{и}2\text{Н}} = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{\sqrt{0,05}a_1 + \alpha}{\sqrt{0,05}(a_1+\alpha)} < t_{\text{и}1}. \qquad (11)$$

При этом $p_2(t_{\text{и}2\text{Н}}) > p_2(t_{\text{и}1})$. Отсюда следует, что два более сильных игрока, даже в том случае, когда они действуют несовместно, быстрее выигрывают в игре 1:2, чем один игрок в игре 1:1 при равных условиях, естественно.

Продолжительность игры 1:2 одного игрока с двумя равными ему по отдаче игроками, но действующими *несовместно*, т.е. при $a_1 = a_{21} = a_{22} = a$ и $p_{1\text{Н}}(t_{\text{и}2\text{Н}}) = 0,05$, определяется выражением

$$t_{\text{и}2\text{Н}} = (\sqrt{20} - 1)/\text{a} = 3,472/a. \qquad (12)$$

Отсюда следует также естественный вывод: чем больше отдача игроков, тем быстрее заканчивается игра выигрышем двух игроков, даже действующих несовместно.

Исследование игры при совместных действиях игроков

Игру 1:2 – одного игрока с двумя равными по отдаче игроками, действующими *совместно*, можно описать дифференциальными уравнениями Колмогорова [19, с. 80] следующего вида:

$$\begin{aligned}
&\dot p_{11}(t) = -[a_1(t) + a_2(t)]p_{11}(t) + a_1(t)p_{12}(t),\\
&\dot p_{12}(t) = -[a_1(t) + 2a_2(t)]p_{12}(t),\\
&\dot p_{01}(t) = -a_2(t)p_{11}(t), \qquad (13)\\
&\dot p_{02}(t) = -2a_2(t)p_{12}(t),
\end{aligned}$$

$$\dot{p}_{10}(t) = -a_1(t)p_{11}(t),$$

с начальными условиями: $p_{11}(0)=0$, $p_{12}(0)=1$, $p_{01}(0)=0$, $p_{02}(0)=0$, $p_{10}(0)=0$. Решение системы (13) должно удовлетворять условиям нормировки

$$p_{10}(t)+p_{11}(t)+p_{12}(t)+p_{00}(t)+p_{01}(t)+$$
$$+p_{02}(t)=1.$$

Здесь $p_{00}(t)=0$ – вероятность проигрыша всеми игроками. Вероятности способностей игроков вести игру 1:2 определяются выражениями:

$$p_1^1(t)=p_{10}(t)+p_{11}(t)+p_{12}(t),$$
$$p_1^2(t)=p_{12}(t)+p_{01}(t), \qquad (14)$$
$$p_2^2(t)=p_{12}(t)+p_{02}(t),$$

где $p_1^1(t)$ – вероятность способности игрока первой стороны; $p_1^2(t)$, $p_2^2(t)$– вероятности способности первого и второго игроков второй стороны вести игру.

Приведенные нелинейные уравнения Колмогорова (13), (14) справедливы как при постоянных a_i, так и при переменных $a_i = a_i(t)$. Игра 1:2 заканчивается при $p_1^1(t)=0$, так как вторая сторона чаще всего (если $2a_2 > a_1$) оказывается сильнее. Однако найти аналитическое решение уравнений (13), (14) не удалось. Поэтому их исследование проводилось при постоянных a_i с применением численных (компьютерных) методов решения нелинейных дифференциальных уравнений, результаты которого будут приведены ниже.

Оценка значений коэффициента системности

Аналитическая оценка на основе линейной модели

Для получения предварительных, приближенных оценок коэффициента системности воспользуемся вытекающими из (13), (14) линейными уравнениями для «средних численностей игроков» второй стороны [19]. Эти уравнения в случае игры 1:2, когда игроки второй стороны обладают равной отдачей, т.е. $a_{21}=a_{22}=a_2$, и действуют *совместно*, имеют следующий вид:

$$\dot{p}_{1C}(t)=-a_2m_2(t),\ \ \dot{m}_2(t)=-a_1p_{1C}(t). \qquad (15)$$

Здесь $p_{1C}(t)$ – вероятность способности игрока первой стороны вести игру 1:2 при *совместных* действиях игроков второй стороны; $m_2(t)$ – «среднее число игроков» второй стороны, способных вести игру на момент времени t. Начальные условия $p_{1C}(0)=1$, $m_2(0)=2$.

Отметим, что поскольку $m_2(t)$ – это средняя численность, то, как решение системы уравнений (15), составленных в предположении некоторого числа (большего единицы) игроков, второй стороны, величина $m_2(t)$ может принимать дробные значения.

Фактически, уравнения (15) являются приближенной, линейной математической моделью игры 1:2 – одного игрока против двух равных по отдаче друг другу игроков и действующих *совместно*. Вероятность $p_{1C}(t)$, как решение системы (15), скорее всего, будет уменьшаться быстрее, чем $p_{1H}(t)$ (8) или (9); чтобы этот факт оценить количественно, необходимо найти функцию $p_{1C}(t)$ как решение системы уравнений (15).

Для удобства решения системы (15), запишем её в векторно-матричной форме, полагая $x = [x_1 \quad x_2]^T$, где $x_1 = p_{1C}$, $x_2 = m_2$. В этих обозначениях система (15) принимает вид

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -a_2 \\ -a_1 & 0 \end{bmatrix} x .$$

Записывая решение этой системы с помощью выражений из [21, с. 77 и с. 236] и переходя к исходным обозначениям, найдём с учетом начальных условий системы (15):

$$p_{1C}(t) = (0,5 + b)e^{-\sigma t} + (0,5 - b)e^{\sigma t}, \qquad (16)$$

$$m_2(t) = (1 + 0,5/b)e^{-\sigma t} + (1 - 0,5/b)e^{\sigma t}, \qquad (17)$$

где $\sigma = \sqrt{a_1 a_2}$ $b = \sqrt{a_2 / a_1}$.

Из выражения (16) следует, что в данном случае игра закончится при $t = t_{и2C}$, когда $p_{1C}(t_{и2C}) = 0$. Отсюда и из (16) следует выражение, определяющее продолжительность игры 1:2 при *совместных* действиях игроков второй стороны:

$$t_{и2C} = \frac{-1}{2\omega} \ln \frac{b - 0,5}{b + 0,5} . \qquad (18)$$

Полученные выражения (8) – (12) и (16) – (18) позволяют приближенно оценить эффект системности как по степени проигрыша игроков, так и по продолжительности игры 1:2.

Замечание 2. Если в игре 1:2 отдачи всех игроков равны, т.е. $a_1 = a_2 = a$, причем игроки второй стороны действуют *совместно*, то $\sigma = a$, $b = 1$, и из выражений (16) – (18) следуют равенства:

$$t_{и2C} = \frac{-1}{2a} \ln \frac{0,5}{1,5} = 0,5493 / a , \qquad (19)$$

$$p_{1C}(t) = 1,5e^{-at} - 0,5e^{at} , \qquad (20)$$

$$m_2(t) = 1,5e^{-at} + 0,5e^{at} .$$

Из выражения (18) следует, что если $a_2 = 0,25a_1$, то время $t_{и2C}$ будет равно бесконечности. В этом случае интенсивность воздействия на игру второй стороны (несмотря на наличие двух игроков) будет в два раза меньше, чем первой, поэтому вторая сторона в игре 1:2 победить не может, даже при совместных действиях своих игроков. По-видимому, такого соотношения отдач достаточно для принятия решения: – начинать антагонистическую игру 1:2 против игрока, в четыре раза более сильного, нет смысла. Поэтому можно заключить, что в уравнениях Колмогорова предполагается, что антагонистические игры начинаются по инициативе второй стороны, что также естественно, так как при $a_2 \approx a_1$ она имеет явное преимущество.

С другой стороны, из выражений (12) и (19) следует, что при совместных действиях игроков второй стороны в игре 1:2 с равным по отдаче игроком, вторая сторона одерживает победу, практически, в шесть раз быстрее, чем при несовместных действиях.

Целью антагонистической игры, в первую очередь, очевидно, является нанесение поражения противной стороне. Поэтому, коэффициент системности определяется [20] как отношение вероятности $q_{1C}(t_{ок,и}) = 1 - p_{1C}(t)$ поражения первого игрока при *совместных* действиях игроков второй стороны к вероятности $q_{1Н}(t) = 1 - p_{1Н}(t)$ его поражения при *несовместных* действиях игроков второй стороны, т.е.

$$K_{сис,П}(t) = \frac{1 - p_{1C}(t)}{1 - p_{1Н}(t)},$$

$$t \le \min\{t_{и2С}, t_{и2Н}\}. \qquad (21)$$

Ввиду сложности выражений (13) и (16), будем искать значения $K_{сис,П}(t)$ (21) при условии $a_1 = a_2 = a$, когда $t_{и2С} = 0{,}5493 / a$, $p_{1C}(t) = 1{,}5e^{-at} - 0{,}5e^{at}$, $\sigma = a$. В этом случае из выражений (9), (20) и (21) выводим

$$K_{сис,П}(t) = \frac{1 - 1{,}5e^{-at} + 0{,}5e^{at}}{1 - (at+1)^{-2}}. \qquad (22)$$

По (22) легко установить, что $K_{сис,П}(0) = 1$, а $K_{сис,П}(t_{и2С}) = 1{,}714$, причем эти значения коэффициента системности не зависят от значения отдачи, что кажется довольно странным! Тем не менее, полученные приближенные результаты свидетельствуют, что действительно, эффективность совместных действий значительно выше, чем несовместных, вследствие эффекта системности.

Найдем также значения коэффициента системности (21) при некоторых значениях t:

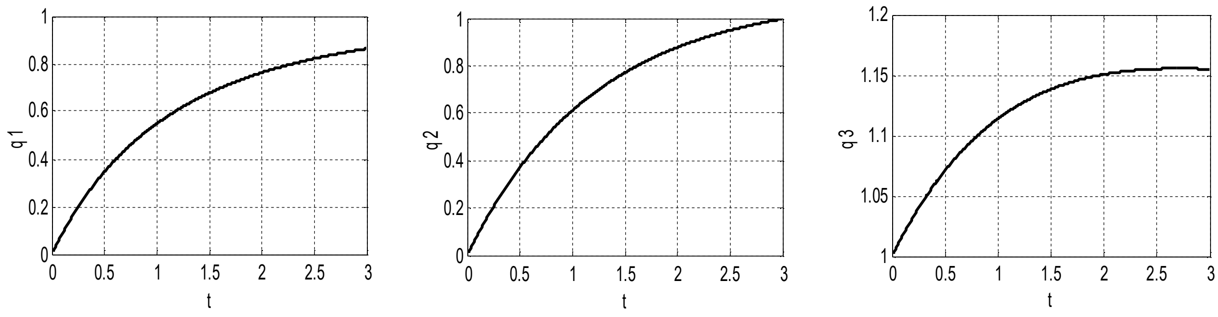
$$K_{сис,П}(0{,}5t_{и2С}) = \frac{1 - 0{,}4817}{1 - 0{,}6155} \approx 1{,}35,$$

$$K_{сис,П}(0{,}75\,t_{и2С}) = \frac{1 - 0{,}2386}{1 - 0{,}5016} \approx 1{,}53.$$

Из полученных данных следует, что при равной и постоянной отдаче всех игроков в течение игры 1:2 коэффициент системности $K_{сис,П}$ увеличивается по мере протекания игры.

Оценка коэффициента системности по нелинейной модели

Как отмечалось выше, уравнения (15) являются линейным приближением уравнений нелинейной модели антагонистической игры (13), (14). Ввиду отсутствия аналитического решения последних, в данной работе исследование игры 1:2 проводилось путем численного решения системы уравнений (13), (14) совместно с уравнениями (1), (2) с применением пакета MATLAB. Для этой цели использовалась функция ODE-45 с шагом по времени 0,002 с при постоянных значениях параметров a_1 и a_2. Так как в соответствии решениями уравнений (1), (2) игру выигрывает игрок или сторона с большим значением ia_i, i = 1, 2, то моделирование производилось при условии $2a_2 \ge a_1$. При этом наряду с определением значений коэффициента системности, фиксировалась и длительность игры $t_{игр}$, которая определялась по условию $q2(t_{игр}) = 1$, где $q2(t) = 1 - p_{10}(t) - p_{11}(t) - p_{12}(t)$ – вероятность поражения игрока первой стороны при *совместных* действиях двух игроков второй стороны. На рисунке 1 приведены графики изменения величин: $q1(t) = q_{1Н}(t) = 1 - [p_1(t)]^2$, $q2(t)$ и $q3(t) = K_{сис,П}(t) = q2(t) / q1(t)$, определяемых решениями в MATLAB системы уравнений (1), (2), (13), (14) при $a_1 = 0{,}3$; $a_2 = 0{,}45$ и указанных выше начальных условиях.



а) б) в)

Рис. Изменения вероятности проигрыша игроком первой стороны: а – при несовместных, б – при совместных действиях игроков второй стороны; в – изменение коэффициента системности в течение игры

Fig. Changes in the losing probability of player of the first side: a – in case of incompatible action, б – in case of the joint actions of the second side players; в – change in the coefficient of systemicity during the game

Результаты и их обсуждение

Некоторые результаты моделирования рассматриваемой антагонистической игры одного игрока против двух игроков по уравнениям (13), (14) при различных значениях параметров a_1 и a_2 представлены в табл. 1 и 2. Табл. 1 отражает зависимость длительности игры 1:2, а табл. 2 зависимость значения коэффициента системности от интенсивности отдач игроков.

На основе результатов компьютерного исследования антагонистической игры 1:2 по нелинейной модели можно сделать следующие выводы:

– значение коэффициента системности $K_{\text{сис,П}}$ является постоянным при постоянном отношении a_2/a_1; при увеличении этого отношения значение коэффициента системности $K_{\text{сис,П}}$ уменьшается, а при уменьшении – увеличивается;

– длительность игры зависит от значений как a_1, так и a_2. При этом длительность игры 1:2 уменьшается с увеличением как отношения a_2/a_1, так и значения a_1, т.е. чем ожесточённее протекает игра, тем короче её длительность;

– при постоянном значении a_2 с увеличением a_1, т.е. с увеличением сопротивления, продолжительность игры 1:2 уменьшается, а коэффициент системности увеличивается;

– при постоянном значении a_1 с увеличением a_2 и продолжительность игры 1:2, и коэффициент системности уменьшаются;

– при $a_2 = a_1$ продолжительность игры 1:2, определяемая решением линейных уравнений (15), примерно в два раза меньше, а значение коэффициента системности примерно в 1,31 раза больше значений, определяемых решением системы нелинейных уравнений (1), (2), (13), (14).

Таблица 1

Длительность игры 1:2

Table 1

Duration of the game 1:2

a_2 \ a_1	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,2	7,97	5,24	3,22	-	-	-
0,4	5,25	4,00	2,63	1,97	1,60	-
0,6	3,56	3.13	2,25	1,74	1,44	1,23
0,8	2,60	2,63	1,97	1,25	1.31	1,13
1,0	2,23	2,25	1,74	1,42	1,21	1,05

Таблица 2

Коэффициент системности

Table 2

Systemicity coefficient

a_2 \ a_1	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,2	1,09	1,31	1,86	-	-	-
0,4	1,02	1,09	1,31	1,57	1,85	-
0,6	1,08	1,04	1,16	1,31	1,44	1,67
0,8	1,004	1,02	1,09	1,25	1,31	1,44
1,0	1,002	1,013	1,06	1,13	1,21	1,31

В частности, приведенные выводы, позволяют указать причину, по которой значения коэффициента системности, определяемые выражением (22), при $t = t_{и2С}$ не зависят от значения отдачи a. Это объясняется тем, что приближенное выражение (22) получено при условии $a_2 = a_1$, т.е. тем, что в соответствии с первым приведенным здесь выводом, отношение a_2/a_1 в этом случае является постоянным и равным единице. Таким образом, несмотря на значительную приближенность линейной модели игры 1:2 в количественном отношении, эта модель в качественном отношении отражает свойства рассматриваемой игры достаточно корректно.

Выводы

Проведенное исследование моделей антагонистической игры двух сторон подтверждает известное положение, что коллективные, совместные действия игроков являются более результативными, по сравнению с несовместными действиями. Продолжительность антагонистической игры зависит от её параметров, а выигрывает игру та сторона, игроки которой обладают большей отдачей. При этом, чем более ожесточённее, с большей отдачей игроков, протекает игра, тем короче её длительность. Коэффициент системности в основном определяется отношением отдач игроков противостоящих сторон. При равенстве отдач игроков в игре 1:2 коэффициент системности близок к значению 1,31. С увеличением отдачи игрока первой стороны при постоянной отдаче игроков второй стороны коэффициент системности увеличивается. Другими словами, чем сильнее сопротивление, тем выше коэффициент системности.

Подчеркнем, что приведенные выводы относятся к играм с постоянной отдачей игроков, хотя в реальных играх она, естественно, уменьшается по мере протекания игры. Исследование этого случая предполагается в дальнейшем. Предложенный в работе подход может применяться для практической оценки эффективности различных методов подготовки участников антагонистических игр, спортсменов, тестируемых, в том числе и в учебных заведениях.

Список литературы

1. Прядеин Р.Б., Степанцов М.Е. Об одном подходе к имитационному моделированию спортивной игры с непрерывным временем // Computer research and simulation. 2014. Т. 6. № 3. С. 455-460.

2. Дубина И.А. Основы теории экономических игр. М.: КноРус, 2010.

3. Осколков В.А., Сулейманов Н.Л., Соловьев П.Ю. Анализ многолетней системы технико-тактической подготовки боксеров // Ученые записки университета им. П.Ф. Лесгафта. СПб.: НГУФКСиЗ им. П.Ф. Лесгафта, 2017. № 9(151). С. 206-211.

4. Dunfield D.L., Read J.F. Determination of reaction rates by using cubic spline interpolation // The Journal of Chemical Physics. 1972. Vol. 57. № 5. P. 2178-2183.

5. Park Y. et al. A comparison of accuracy and stroke characteristics between two putting grip techniques // Proc. ISBS Conference. 2009. P. 70-73.

6. Veloso M. Autonomous robot soccer times // National Academy of Engineering. 2003. Vol. 33(1). P. 8-12.

7. Каляев И.А., Гайдук А.Р. Стайные принципы управления в группе объектов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2004. № 12. С. 29-33.

8. Stilmanl B., Aldossary M. Discovering the algorithm of discovery by investigating no-search approach // Processing of Asian Conference on Defence Technology (ACDT). Thailand, 2015, 23 – 25, April. P. 87-94.

9. Cao Y.U., Fukunaga A.S., Kahng A.B., Meng F. Cooperative mobile robotics: antecedents and directions // Autonomous Robots. 1997. Vol. 4. P. 1-23.

10. Использование современных технологий математического моделирования при подготовке спортсменов высшего класса / В. Жаркова, Ю. Фишер, Д. Нуштаев, С. Рыжов, А. Щеляев, П Музыкин., М. Шестаков // САПР и графика. 2014. № 2. С. 86-96.

11. Михайлов С.Н., Демьяненко В.Ю. Инфологические технологии в задачах автоматизированного тестирования знаний студентов // Известия Юго-Западного государ-

ственного университета. 2017. Т. 21. № 3(72). С. 75-83. https://doi.org/10.21869/2223-1560-2017-21-3-75-83.

12. Дроздов В. И., Маслак А. А., Новиков Ю. М. Использование современной теории тестологии при оценке качества АПИМ // Известия Юго-Западного государственного университета. 2008. № 4(25). С. 87-95.

13. Балашов В.Ф. Формирование аттестационного педагогического измерительного материала по дисциплине "Теория и организация адаптивной физической культуры". М.: Физическая культура, 2008.

14. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. М.: Наука, 2001.

15. Калинкин А.В. Уравнения марковского процесса гибели в математической теории надежности // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. Вып. 14. С. 1-7.

16. Саати Т. Принятие решений: Метод анализа иерархий. М.: Советское Радио, 1993.

17. Tipkiller. URL: http://www.tipkiller.com/ru/betting-guide/analiz-teorii-kolmogorova-chepmena-dlya-stavok-na-sport.php.

18. Кондратьев Б.П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: Мир, 2007.

19. Буравлев А.И., Буренок В.М., Брезгин В.С. Методы оценки эффективности вооружения и военной техники / под ред. проф. В.М. Буренка. СПб.: ВАТТ, 2011.

20. Гайдук А.Р., Каркищенко А.Н., Пшихопов В.Х. О влиянии РТК ВН на эффективность использования ВВТ // Известия ЮФУ. Серия Технические науки. 2019. № 1. С61-74.

21. Гайдук А.Р. Непрерывные и дискретные динамические системы. М.: Учебная литература, 2004.

References

1. Pryadein R.B., Stepantsov M.E. Ob odnom podkhode k imitatsionnomu modelirovaniyu sportivnoi igry s nepreryvnym vremenem [On a possible approach to a sport game with continuous time simulation]. *Computer research and simulation,* 2014, vol. 6, no. 3, pp. 455-460 (In Russ.).

2. Dubina I.A. *Osnovy teorii ekonomicheskikh igr* [Bases of the theory of economic games]. Moscow, KnoRus Publ., 2010 (In Russ.).

3. Oskolkov V.A., Suleymanov N.L., Solovev P.Yu. Analiz mnogoletnei sistemy tekhniko-takticheskoi podgotovki bokserov [Analysis of perennial system of technical-tactical preparation of boxers]. *Uchenye zapiski universiteta im. P.F. Lesgafta = Scientific notes of university nm. P.F. Lesgaft*, 2017, no. 9(151), pp. 206-211 (In Russ.).

4. Dunfield D.L., Read J.F. Determination of reaction rates by using cubic spline interpolation. *The Journal of Chemical Physics*, 1972, vol. 57, no. 5, pp. 2178-2183.

5. Park Y. et al. A comparison of accuracy and stroke characteristics between two putting grip techniques. Proc. ISBS Conference, 2009, pp. 70-73.

6. Veloso M. Autonomous robot soccer tims. *National Academy of Engineering*, 2003, vol. 33(1), pp. 8-12.

7. Kaliaev I.A., Gaiduk A.R. Stainye printsipy upravleniya v gruppe ob"ektov [Gregarious principles of control in bunch of objects]. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie = Mechatronic, automation, control*, 2004, no. 12, pp. 29-33 (In Russ.).

8. Stilmanl B., Aldossary M. Discovering the algorithm of discovery by investigating no-search approach. Proceedings of Asian Conference on Defence Technology (ACDT). Thailand, 2015, 23 – 25, April., pp. 87-94.

9. Cao Y.U., Fukunaga A.S., Kahng A.B., Meng F. Cooperative mobile robotics: antecedents and directions. *Autonomous Robots*, 1997, vol. 4, pp. 1-23.

10. Zharkova V., Fisher Yu., Nushtaev D., Ryzhov S., Schelyaev A., Muzykin P., Shestakov M. Ispol'zovanie sovremennykh tekhnologii matematicheskogo modelirovaniya pri podgotovke sportsmenov vysshego klassa [Use of modern technologies of mathematical modelling by preparation of sportsmen of the highest class]. *SAPR i grafika = SAPR and drawing*, 2014, no. 2, pp. 86-96 (In Russ.).

11. Mikhailov S.N., Demyanenko V.Yu. Infologicheskie tekhnologii v zadachakh avtomatizirovannogo testirovaniya znanii studentov [Info logical technologies in problems of the computerized testing of students' knowledge]. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta = Proceedings of the Southwest State University,* 2017, vol. 21, no. 3(72), pp. 75-83 (In Russ.). https:///doi.org/10.21869/2223-1560-2017-21-3-75-83.

12. Drozdov V.I., Maslak A.A., Novikov Yu.M. Ispol'zovanie sovremennoi teorii testologii pri otsenke kachestva APIM [Use of the modern theory test logical at evaluation test CPMS]. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta = Proceedings of the Southwest State University*, 2008, no. 4(25), pp. 87-95 (In Russ.).

13. Balashov V.F. *Formirovanie attestatsionnogo pedagogicheskogo izmeritel'nogo materiala po distsipline "Teoriya i organizatsiya adaptivnoi fizicheskoi kul'tury"* [Formation of a certificate pedagogical measuring stuff on discipline "Theory and the organization of adaptable physical training"]. Moscow, 2008 (In Russ.).

14. Ventsel E.S. *Issledovanie operatsii: zadachi, printsipy, metodologiya* [Operational research: problems, principles, methodology]. Moscow, Nauka Publ., 2001 (In Russ.).

15. Kalinkin A.V. Uravneniya markovskogo protsessa gibeli v matematicheskoi teorii nadezhnosti [Equations of markov destruction process in the mathematical theory of reliability]. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii = Engineering magazine: a science and innovations*, 2013, is. 14, pp. 1-7 (In Russ.).

16. Saati T. *Prinyatie reshenii: Metod analiza ierarkhii* [Decision-making: Method of the analysis of hierarchies]. Moscow, 1993 (In Russ.).

17. Tipkiller. Available at: http://www.tipkiller.com/ru/betting-guide/analiz-teorii-kolmogorova-chepmena-dlya-stavok-na-sport.php.

18. Kondrat'ev B.P. *Teoriya potentsiala. Novye metody i zadachi s resheniyami* [Potential theory. New methods and problems with decisions]. Moscow, Mir Publ., 2007 (In Russ.).

19. Buravlev A.I., Burenok V.M., Brezgin V.S. *Metody otsenki effektivnosti vooruzheniya i voennoi tekhniki* [Methods of the efficacy estimation of arms and military technology]. St. Petersburg, VATT Publ., 2011 (In Russ.).

20. Gaiduk A.R., Karkischenko A.N., Pshikhopov V.Kh. O vliyanii RTK VN na effektivnost' ispol'zovaniya VVT [About influence of RTK MP on efficiency of use BBT]. *Izvestiya YuFU. Seriya Tekhnicheskie nauki, = News SFedU. Series Technical Sciences*, 2019, no. 1, pp. 61-74 (In Russ.).

21. Gaiduk A.R. *Nepreryvnye i diskretnye dinamicheskie sistemy* [Continuous and discrete dynamic systems]. Moscow, 2004 (In Russ.).

Информация об авторах / Information about the Authors

Гайдук Анатолий Романович, доктор технических наук, профессор, ФГАБЮ «Южный федеральный университет», г. Таганрог, Российская Федерация, e-mail: gaiuk_2003@mail.ru

Пшихопов Вячеслав Хасанович, доктор технических наук, профессор, ФГАБЮ «Южный федеральный университет», г. Таганрог, Российская Федерация, e-mail: pshichop@rambler.ru

Медведев Михаил Юрьевич, доктор технических наук, профессор, ФГАБЮ «Южный федеральный университет», г. Таганрог, Российская Федерация, e-mail: medvedevmihal@sfedu.ru

Плаксиенко Владимир Сергеевич, доктор технических наук, профессор, ФГАБЮ «Южный федеральный университет», г. Таганрог, Российская Федерация, e-mail: vsp46@mail.ru

Гонтарь Дмитрий Николаевич, младший научный сотрудник, преподаватель ВС, ФГАБЮ «Южный федеральный университет», г. Таганрог, Российская Федерация, e-mail: dgontar@sfedu.ru

Anatoly R. Gaiduk, Dr. of Sci. (Engineering), Professor, Southern Federal University, Taganrog, Russian Federation, e-mail: gaiduk_2003@mail.ru

Vyacheslav Kh. Pshikhopov, Dr. of Sci. (Engineering), Professor, Southern Federal University, Taganrog, Russian Federation, e-mail: pshichop@rambler.ru

Mikhail Yu. Medvedev, Dr. of Sci. (Engineering), Professor, Southern Federal University, Taganrog, Russian Federation, e-mail: medvedevmihal@sfedu.ru

Vladimir S.Plaksienko, Dr. of Sci. (Engineering), Professor, Southern Federal University, Taganrog, Russian Federation, e-mail: vsp46@mail.ru

Dmitriy N. Gontar, Researcher, Southern Federal University, Taganrog, Russian Federation, e-mail: dgontar@sfedu.ru