

<https://doi.org/10.21869/2223-1560-2019-23-4-42-56>

## Исследование колебаний конвертоплана в вертикальной продольной плоскости

С.Ф. Яцун<sup>1</sup>, Б.В. Лушников<sup>1</sup>, О.В. Емельянова<sup>1</sup> ✉, С.П. Стуканева<sup>1</sup>

<sup>2</sup> ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», ул. 50 лет Октября, 94, г. Курск, 305040, Российская Федерация

✉ e-mail: oks-emelyanova@yandex.ru

### Резюме

**Цель исследования.** В статье проведено математическое моделирование и исследование движения конвертоплана, выполненного по квадрокоптерной схеме, в переходных режимах, под которым будем понимать момент перехода аппарата из вертикального полета в горизонтальный и обратно, осуществляемый за счет изменения направления вектора тяги несущих винтов. Такие задачи изучены недостаточно, а именно, при выполнении таких маневров может происходить значительное отклонение конвертоплана от заданной траектории, а при определенных условиях потеря его управляемости и падение. Поэтому целью данной статьи является изучение основных закономерностей движения в переходных режимах и особенностей алгоритмов управления на основе математических моделей, описывающих управляемое движение малогабаритных беспилотных конвертопланов.

**Методы.** Для решения поставленных задач использовались методы теоретической механики и механики роботов, матричный подход к определению радиус-векторов и их производных для основных точек звеньев механизма. Достоинствами матричного метода являются простота, универсальность правил при выборе осей координат для формирования матриц перехода. При изучении закономерностей движения конвертоплана использовались методы математического моделирования динамических систем с учетом свойств электроприводов, кинематики вращения корпуса, алгоритмов формирования управляющих напряжений, и внешних периодических возмущений. При разработке управляющих алгоритмов использовались методы теории автоматического управления. Управление осуществлялось программно с помощью ПИД регулятора, позволяющего минимизировать фактические и требуемые значения управляемой величины.

**Результаты.** Выявлено, что при отклонении несущих винтов возникают связанные колебания, определена область параметров регулятора, при которых эти колебания в переходный период затухают и конвертоплан восстанавливает равновесное состояние. Так же выявлены зависимости отклонения реальной позиции аппарата от заданной по координатам ОХ, ОУ при изменении значений коэффициента дифференциальной и пропорциональной составляющих регулятора САУ соответственно. Характер изменения графиков свидетельствует о существенном влиянии коэффициентов регулятора на характер переходного процесса в части амплитудных значений ошибки и времени переходного процесса.

**Заключение.** Разработана математическая модель и выполнено математическое моделирование движения конвертоплана в переходных режимах движения. Показано, что управление углом тангажа, а так же движение в вертикальной плоскости состоят из нескольких контуров пропорционально-дифференциального управления, поэтому необходимо, что бы каждый контур имел схему, препятствующую значительному отклонению управляемых параметров от заданных значений, при которых обеспечивается устойчивый переход конвертоплана в горизонтальное положение. Определены параметры минимизации средней квадратической ошибки.

**Ключевые слова:** конвертоплан-квадрокоптер; обобщенные координаты; переходные режимы; связанные колебания; корректирующее воздействие.

**Конфликт интересов:** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Для цитирования:** Исследование колебаний конвертоплана в вертикальной продольной плоскости / С.Ф. Яцун, Б.В. Лушников, О.В. Емельянова, С.П. Стуканева // Известия Юго-Западного государственного университета. 2019; 23(4): 42-56. <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2019-23-4-42-56>.

Статья поступила в редакцию 03.06.2019

Статья подписана в печать 18.07.2019

<https://doi.org/10.21869/2223-1560-2019-23-4-42-56>

## Study of Tiltrotor Oscillations in a Vertical Longitudinal Plane

Sergei F. Jatsun <sup>1</sup>, Boris V. Lushnikov <sup>1</sup>, Oksana V. Emelyanova <sup>1</sup> ✉,  
Svetlana P. Stukaneva <sup>1</sup>

<sup>2</sup> Southwest State University, 94, 50 Let Oktyabrya str., Kursk, 305040, Russian Federation

✉ e-mail: oks-emelyanova@yandex.ru

### Abstract

**Purpose of research.** The article provides mathematical simulation and a study of the motion of the tiltrotor, constructed according to the quadcopter scheme, in transient modes. Under these modes, the moment of transition of the device from the vertical flight to the horizontal flight and back, performed due to changing the direction of the thrust vector of the rotors is meant. These issues are not sufficiently studied, including the fact that, when performing such maneuvers, a significant deviation of the tiltrotor from the given trajectory can occur, and under certain conditions, the loss of its controllability and fall can happen. Therefore, the purpose of this paper is to study the basic patterns of motion in transient modes and features of control algorithms based on mathematical models describing the controlled motion of small unmanned tiltrotors.

**Methods.** To solve these problems, methods of theoretical mechanics and mechanics of robots, a matrix approach to the determination of the radius-vectors and their derivatives for the main points of the mechanism pieces were used. The advantages of the matrix method are simplicity, universality of the rules for selecting coordinate axes for transition matrices generation. Studying the patterns of the motion of the tiltrotor, methods of mathematical simulation of dynamic systems considering the properties of electric drives, kinematics of rotation of the body, algorithms for the formation of control voltages, and external periodic disturbances, were used. When developing control algorithms, methods of the automatic control theory were applied; the control was performed applying software, using PID control allowing minimization of the actual and required values of the controlled variable.

**Results.** It is revealed that in case of the deviation of the rotor, coupled oscillations occur; the range of parameters of the control, at which these oscillations in the transition period are damped and the tiltrotor recovers equilibrium, are determined. Also, there were revealed dependences of deviations of the actual position of the device from the set position in coordinates  $Ox$ ,  $Oy$ , when the values of the coefficient of differential and proportional components of the ACS control change respectively. The pattern of the change of the diagrams indicates a significant influence of the control coefficients on the pattern of the transition process in terms of the amplitude values of the error and the time of the transition process.

**Conclusion.** *A mathematical model is developed and mathematical simulation of the tiltrotor motion in transient modes is performed. It is shown that the control of the pitch angle, as well as the motion in the vertical plane consist of several loops of proportional-differential control, so it is necessary for each loop to have a circuit that prevents a significant deviation of the controlled parameters from the specified values, at which a stable transition of the tiltrotor to the horizontal position is provided. The parameters of the mean square error minimization are determined.*

**Keywords:** *tiltrotor-quardcopter; generalized coordinates; transient modes; coupled oscillations; corrective action.*

**Conflict of interest.** *The Authors declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.*

**For citation:** Jatsun S. F., Lushnikov B. V., Emelyanova O. V., Stukaneva S. P. Study of Tiltrotor Oscillations in a Vertical Longitudinal Plane. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta = Proceedings of the Southwest State University*. 2019, 23(4): 42-56 (In Russ.). <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2019-23-4-42-56>.

Received 03.06.2019

Accepted 18.07.2019

\*\*\*

## Введение

Последние годы широкое распространение получили мультироторные беспилотные летательные аппараты (БПЛА) [1-9]. В то же время, как показали экспериментальные исследования, для эффективного использования таких устройств важно обеспечить достаточную длительность нахождения БПЛА в воздухе. Одним из путей повышения этого важного показателя является переход классических мультироторов к конвертопланам, которые позволяют использовать как вертолетный режим движения при взлете и зависании, так и самолетный, при полете в горизонтальной плоскости. Такие устройства отличаются от самолетных схем повышенной маневренностью и скоростными характеристиками, а по отношению к мультироторам характеризуются пониженным энергопотреблением в горизонтальном полете, что позволяет осуществлять выполнение разведывательных операций, транспортных работ и

мониторинга окружающей среды на удалённых и труднодоступных территориях [4, 5].

Несмотря на все более широкое распространение конвертопланов [4, 5, 10, 11-15], управление автономным полетом по заданной траектории особенно в режимах перехода из вертикального полета в горизонтальный и обратно (так называемые, переходные режимы, осуществляемые за счет изменения направления вектора тяги) изучены недостаточно, а именно при выполнении таких маневров может происходить значительное отклонение конвертоплана от заданной траектории, а при определенных условиях потеря управляемости аппарата и его падение [10]. Поэтому целью данной статьи является изучение основных закономерностей движения в переходных режимах и особенностей алгоритмов управления на основе математических моделей, описывающих управляемое движение малогабаритных беспилотных конвертопланов.

## Материалы и методы

Схема конвертоплана-квадрокоптера приведена на рис. 1. Рассмотрим движение конвертоплана в неподвижной декартовой системе координат  $OX_0Y_0Z_0$ , пусть  $CX_1Y_1Z_1$  ( $i=1-4$ ) – подвижные системы координат, проходящие через центр масс корпуса аппарата  $C$ . Ориентацию корпуса в пространстве задают самолетные углы рысканья  $\psi$ ,

тангажа  $\theta$  и крена  $\varphi$ . Конвертоплан состоит из четырех управляемых винтов 1-4 с изменяемыми векторами тяги, электроприводы которых реализованы на основе бесколлекторных электродвигателей, а также корпуса (фюзеляжа) 5 на котором закреплены блок питания и плата управления, электрически связанные с приводами вращения винтов [11, 12, 15, 16].

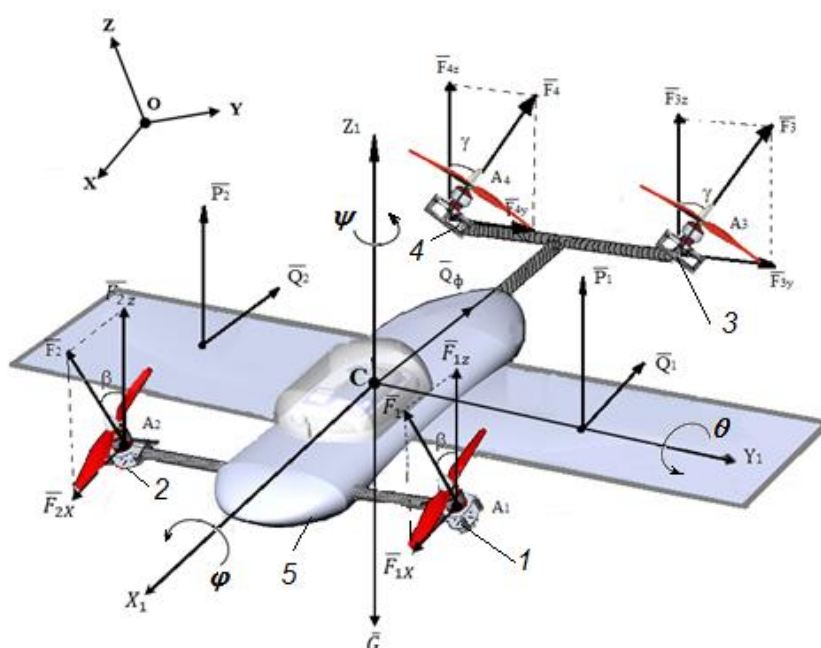


Рис.1. Расчетная схема конвертоплана

Fig.1. Tiltrotor design scheme

Отклонение векторов тяги поворотных приводов 1,2 на угол  $\beta$ , осуществляется в плоскостях, которые параллельны плоскости  $CX_1Z_1$ . Угол  $\beta$ , может изменяться от 0 до  $90^\circ$ . Приводы 3,4 поворачиваются на угол  $\gamma = \pm 90^\circ$  в плоскости, параллельной  $CY_1Z_1$ .

Далее будем обозначать символами (0) и (1) векторы, определённые в си-

стемах координат  $OX_0Y_0Z_0$  и  $CX_1Y_1Z_1$ , соответственно. Положение центра масс конвертоплана задается вектором  $\bar{r}_{OC}^{(0)} = [x, y, z]^T$ , а ориентация конвертоплана в пространстве – вектором  $\bar{\alpha} = [\varphi, \psi, \theta]^T$  [4,10]. Таким образом, вектор  $\bar{r}^{(0)} = [\bar{r}_{OC}^{(0)}, \bar{\alpha}]^T$  полностью определяет пространственное расположение конвертоплана.

Абсолютную угловую скорость вращения роторов определяем как [17]:

$$\bar{\Omega}_i = \bar{\omega}_c + \bar{\omega}_i, \quad (1)$$

где  $\bar{\Omega}_i$  – абсолютная угловая скорость вращения  $i$ -ого ротора в подвижной системе координат;  $\bar{\omega}_c, \bar{\omega}_i$  – векторы угловых скоростей вращения корпуса конвертоплана и  $i$ -ого ротора.

Абсолютные скорости центров масс роторов (точек  $A_i$ ) можно представить, как [17]:

$$\bar{v}_{A_i}^{(0)} = \bar{v}_c^{(0)} + \dot{T}_{10} \cdot \bar{r}_{CA_i}^{(1)}, \quad (2)$$

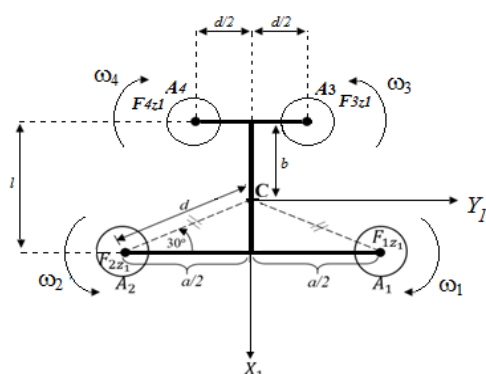


Рис.2. Геометрические параметры конвертоплана, определяющие расположение центров масс корпуса конвертоплана  $C$  и роторов  $A_i$ : 1–4 – несущие винты; 5 – фюзеляж

Fig.2. Geometric parameters of the tiltrotor, determining the location of the centers of mass of the tiltrotor body  $C$  and rotors  $A_i$ : 1-4 - rotors; 5 – fuselage

### Определение сил, действующих на конвертоплан

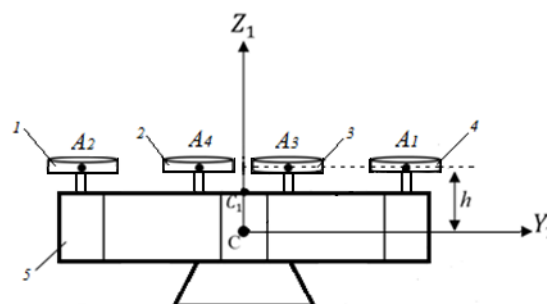
Силы, приложенные к конвертоплану (рис.1), можно разделить на силы, задаваемые в абсолютной системе координат  $OX_0Y_0Z_0$ : сила тяжести  $\bar{G}$ , приложенная в центре масс  $C$ , и силы, определенные в подвижной системе координат  $CX_1Y_1Z_1$ : силы, создаваемые

где  $T_{10}$  – матрица перехода из (1) в (0) систему координат [4, 18, 19];  $\bar{r}_{CA_i}^{(1)}$  – радиус-векторы для точек  $A_i$  в соответствии с рис.2 имеют вид:

$$\bar{r}_{CA_1}^{(1)} = \begin{bmatrix} d/2 \\ a/2 \\ h \end{bmatrix}, \quad \bar{r}_{CA_2}^{(1)} = \begin{bmatrix} d/2 \\ -a/2 \\ h \end{bmatrix},$$

$$\bar{r}_{CA_3}^{(1)} = \begin{bmatrix} -b \\ d/2 \\ h \end{bmatrix}, \quad \bar{r}_{CA_4}^{(1)} = \begin{bmatrix} -b \\ -d/2 \\ h \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Здесь  $a, b, c, d, h$  – геометрические размеры конвертоплана.



винтами  $\bar{F}_i$ , приложенные в центре масс роторов  $\bar{A}_i$ ; аэродинамические силы, действующие на поверхность крыла  $Q_j$  ( $j=1,2$ ), называемые силой лобового сопротивления, направленные в сторону, противоположную оси  $CX_1$ , и силу  $Q_\phi$ , действующую на фюзеляж, а так же подъемные силы крыла  $\bar{P}_j$  и фюзеляжа  $\bar{P}_\phi$ .

Приближенно модуль силы тяги винта определим как [19]:

$$\bar{F}_i^{(1)} = \bar{b}_i^T \bar{\omega}_i |\bar{\omega}_i|, \quad (4)$$

где  $\bar{b}_i = (b_x \ b_y \ b_z)^T$  – аэродинамический коэффициент, модуль которого

$$b_i = \frac{c_T \rho S_H R^2}{2} [5, 16, 17].$$

Векторы силы тяги винтов, подъемной силы крыла и силы сопротивления соответственно в нулевой системе координат можно определить по следующим формулам [16, 10, 19, 12, 13]:

$$\begin{aligned} \bar{F}_i^{(0)} &= T_{10} \cdot \bar{F}_i^{(1)}, \\ \bar{P}_j^{(0)} &= T_{10} \cdot \bar{P}_j^{(1)}, \quad \bar{Q}_j^{(0)} = T_{10} \cdot \bar{Q}_j^{(1)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Модули подъемной силы крыла  $P_j^{(1)}$  и силы сопротивления  $\bar{Q}_j^{(1)}$  будем определять как [16, 10]:

$$\begin{aligned} P_j^{(1)} &= \frac{c_L \rho S V^2}{2} = k V^2, \\ Q_j^{(1)} &= \frac{c_D \rho S V^2}{2} = \mu_x V^2, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\rho$  – плотность воздуха;  $c_L$ ,  $c_D$  – коэффициенты сил подъемной и сопротивления, зависящие от геометрии крыла;  $S$  – площадь крыла;  $V$  – скорость набегающего воздушного потока.

Математическая модель движения конвертоплана

Система дифференциальных уравнений, описывающих изменение обобщенных координат, определяющих положение центра масс конвертоплана в пространстве под действием сил тяги винтов, подъемной силы, сил сопротив-

ления и сил веса, описана в [1-3, 5, 12-15, 20, 19].

Условия перехода конвертоплана из вертикального полета в режим горизонтального полета сформулируем следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Пусть при } t=0 \quad z^* &= H, \quad \dot{z}^* = 0, \\ \ddot{z}^* &= 0, \gamma = 0, \beta = \sum a_i t^i, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Для заданных граничных условий закон изменения угла  $\beta$  за время  $t_l$  имеет вид

$$\beta = \beta(t) = \frac{\pi}{t_1^2} t^2 - \frac{3\pi}{3t_1^3} t^3, \quad (7)$$

а уравнение заданного движения по координате  $OX_0$ :

$$x^*(t) = \sum_{i=0}^3 D_i^* t^i, \quad (8)$$

тогда скорость и ускорение заданного движения определим как:

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= \sum_{i=1}^3 i D_i^* t^{i-1}, \\ \ddot{x}^*(t) &= \sum_{i=2}^3 i(i-1) D_i^* t^{i-2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $D_i^*$  – постоянные, определяемые из граничных условий: при  $t=0$   $x_0^* = 0$ ,  $\dot{x}^* = 0$ , при  $t=t_l$   $x_0^* = 0$ ,  $\dot{x}^* = l$ , где  $l$  – длина пути вдоль оси  $x$ .

С учетом этого уравнение заданного движения по координате  $OX_0$  будет иметь вид:

$$x^* = x^*(t) = \frac{3l}{t_1^3} t^3 - \frac{2l}{t_1^2} t^2. \quad (10)$$

Считаем, что САУ конвертоплана обеспечивает выполнение условий:  $\varphi=0$ ,  $\psi=0$ .

Дифференциальные уравнения заданного движения вдоль осей  $OX_0$ ,  $OZ_0$  представим в виде [10]:

$$\ddot{x}^* = \frac{1}{M} \sum_1^4 F_{ix}^*; \quad \ddot{z}^*(t) = \frac{1}{M} \left[ \left( \sum_1^4 F_{iz}^* - Mg \right) + P(\dot{x}^*) \right]. \quad (11)$$

Здесь  $P(\dot{x}) = \mu_x \dot{x}$  – подъёмная сила крыла,  $M = \sum m_k$  – масса аппарата.

Дифференциальные уравнения реального движения представим в виде

$$\ddot{x}^* = \frac{1}{M} \sum_1^4 F_{ix}; \quad \ddot{z}^* = \frac{1}{M} \left( \sum_1^4 F_{iz} - Mg \right) + P(\dot{x}). \quad (12)$$

Вычтем из (11) (12) и получим:

$$\ddot{x}^*(t) - \ddot{x}(t) = \frac{1}{M} \left( \sum_1^4 F_{ix}^* - \sum_1^4 F_{ix} \right), \quad (13)$$

$$\ddot{z}^*(t) - \ddot{z}(t) = \frac{1}{M} (k_{dz} \Delta \dot{z} - k_{pz} \Delta z + P(\Delta \dot{x})), \quad (14)$$

где  $k_{pz}$ ,  $k_{dz}$  – коэффициенты соответственно пропорционального и дифференциального регулятора,  $P(\Delta \dot{x}) = P(\dot{x}^*) - P(\dot{x})$ .

Пусть корректирующее воздействие вдоль оси  $OX_0$ :  $\Delta \sum_1^4 F_{ix}$  определяется по формуле, что соответствует пропорционально-дифференциальному регулятору:

$$\Delta \sum_1^4 F_{ix} = -k_{px} \Delta x + k_{dx} \Delta \dot{x}. \quad (15)$$

Тогда:

$$\ddot{x} + \frac{k_{dx}}{M} \dot{x} - \frac{k_{px}}{M} x = \ddot{x}^* + \frac{k_{dx}}{M} \dot{x}^* - \frac{k_{px}}{M} x^*, \quad (16)$$

или с учетом (11) уравнение (18) будет иметь вид

$$\ddot{x} + \frac{k_{dx}}{M} \dot{x} - \frac{k_{px}}{M} x = \sum_{i=2}^3 i(i-1) D_i^* t^{i-2} + \frac{k_{dx}}{M} \sum_{i=1}^3 i D_i^* t^{i-1} - \frac{k_{px}}{M} \sum_{i=0}^3 D_i^* t^i. \quad (17)$$

Решение уравнения представим в виде

$$x = e^{-n_x t} \left( A_{11} e^{\sqrt{K_{px}} t} + A_{12} e^{-\sqrt{K_{px}} t} \right) + \sum_{i=0}^3 E_i^* t^i, \quad (18)$$

$$\text{где } n_x = \frac{k_{dx}}{2M}, \quad K_{px} = \frac{k_{px}}{M}.$$

Коэффициенты  $A_{11}$ ,  $A_{12}$  определим из начальных условий, а  $E_i^*$  найдем из уравнения:

$$\sum_{i=2}^3 i(i-1) E_i^* t^{i-2} + k_{dx} \sum_{i=1}^3 i E_i^* t^{i-1} - k_{px} \sum_{i=0}^3 E_i^* t^i = \sum_{i=0}^3 \delta_i^* t^i, \quad (19)$$

$$\text{где } \sum_{i=0}^3 \delta_i^* t^i = \sum_{i=2}^3 i(i-1) D_i^* t^{i-2} + k_{dx} \sum_{i=1}^3 i D_i^* t^{i-1} - k_{px} \sum_{i=0}^3 D_i^* t^i.$$

Теперь можно определить отклонение по координате  $OX_0$  реального положения центра масс конвертоплана относительно заданного:

$$x^*(t) - x(t) = \Delta x, \quad (20)$$



или с учетом (18) из уравнения (19) определим:

$$\Delta x = \sum_{i=0}^3 D_i^* t^i - e^{-n_x t} (A_{11} e^{\sqrt{K_x} t} + A_{12} e^{-\sqrt{K_x} t}) + \sum_{i=0}^3 E_i^* t^i. \quad (21)$$

Очевидно, что величина ошибки зависит от коэффициентов  $k_{px}$ ,  $k_{dx}$  и времени  $t$ .

Далее, аналогично, в соответствии с (12), (13), определим отклонение по координате  $OZ_0$  реального положения центра масс конвертоплана относительно заданного:

$$\dot{z}^*(t) - \dot{z}(t) = \frac{1}{M} ((\sum_1^4 F_{iz}^* - Mg) + P(\dot{x}) - (\sum_1^4 F_{iz} - Mg) + P(\dot{x})) \quad (22)$$

$$\Delta \sum_1^4 F_{iz} = k_{dz} \Delta \dot{z} - k_{pz} \Delta z \quad (23)$$

$$\dot{z}^*(t) - \dot{z}(t) = \frac{1}{M} [(k_{dz} \Delta \dot{z} - k_{pz} \Delta z) + P(\Delta \dot{x})], \quad (24)$$

$$\ddot{z} + K_{dz} \dot{z} - K_{pz} z =$$

$$\ddot{z} + K_{dz} \dot{z} - K_{pz} z^* + \frac{1}{M} P(\Delta \dot{x}),$$

(25)

$$\text{где } \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^3 i D_i^* t^{i-1}, \quad K_{pz} = \frac{k_{pz}}{M},$$

$$K_{dz} = \frac{k_{dz}}{M},$$

$$\dot{x} = e^{-n_x t} [A_{11} e^{\sqrt{K_{px}} t} (-n_x + \sqrt{K_{px}}) +$$

$$+ A_{12} e^{-\sqrt{K_{px}} t} (-n_x - \sqrt{K_{px}})] + \sum_{i=1}^3 i E_i^* t^{i-1}.$$

Решение уравнения (25) представим в виде общего и частного решений:

$$z = e^{-n_z t} (A_1 e^{\sqrt{K_{pz}} t} + A_2 e^{-\sqrt{K_{pz}} t}) + \sum_{i=0}^3 B_i^* t^i + z', \quad (26)$$

где  $n_z = \frac{k_{dz}}{2M}$ , частное решение  $z'$  зависит от вида  $P(\dot{x})$ .

Для малых скоростей и заданного движения:

$$P(\dot{x}^*) = \mu_x \sum_{i=1}^3 i D_i^* t^{i-1}, \quad (27)$$

для возмущенного движения:

$$P(\dot{x}) = \mu_x e^{-n_x t} [A_{11} e^{\sqrt{K_{px}} t} (-n_x + \sqrt{K_{px}}) + A_{12} e^{-\sqrt{K_{px}} t} (-n_x - \sqrt{K_{px}})] + \sum_{i=1}^3 i E_i^* t^{i-1}. \quad (28)$$

Отклонение реального положения центра масс от заданного определим как:

$$\Delta z = H - z = H - e^{-n_z t} (A_1 e^{\sqrt{K_{pz}} t} - A_2 e^{-\sqrt{K_{pz}} t}) - \sum_{i=0}^3 B_i^* t^i - z'. \quad (29)$$

## Результаты и их обсуждение

Проведем моделирование переходного процесса и построим графики зависимостей корректирующих воздействий  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$  от коэффициентов пропорционального  $k_p$  и дифференциального  $k_d$  регуляторов [14, 15, 20]:

$$\Delta x = \Delta x(k_{dx}(t), k_{px}(t)),$$

$$\Delta z = \Delta z(k_{dz}(t), k_{pz}(t)). \quad (30)$$



Необходимо также определить значения  $K^{\min}$ ,  $K^{\max}$  соответствующие минимальному отклонению реального положения центра масс конвертоплана от заданного из условий:

$$\frac{d\Delta x}{dK_{px}} = 0, \quad \frac{d\Delta x}{dK_{dx}} = 0, \quad \frac{d\Delta z}{dK_{pz}} = 0, \\ \frac{d\Delta z}{dK_{dz}} = 0. \quad (31)$$

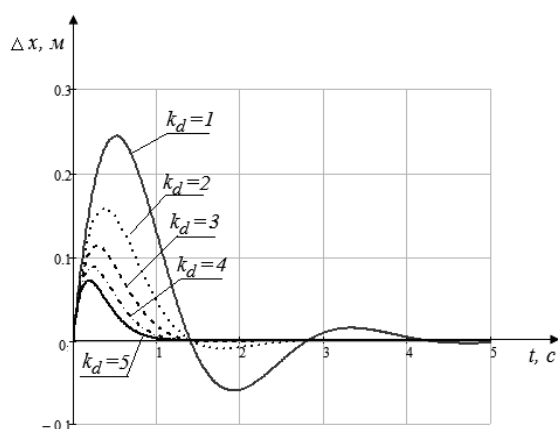


Рис.3. График отклонения реального положения центра масс от заданного при начальной скорости  $v_0=1$  м/с;  $k_{px}=-5$  и различных  $k_{dx}$

Fig.3. Diagram of the deviation of the actual position of the center of mass from the set position at the initial velocity  $v_0 = 1$  m/s;  $k_{px}=-5$  and various  $k_{dx}$

На рис. 5 приведен график линий равного уровня для минимальных и максимальных значений интегральной

ошибки  $\bar{\Delta x} = \frac{1}{T} \int_0^T (\Delta x(t))^2 dt$  для ко-

эффициентов  $k_{px}$  и  $k_{dx}$  регулятора.

На рис. 6 представлены графики зависимости отклонения по оси  $OZ_0$  для различных значений коэффициентов  $\mu_x$ , определяющих подъёмную силу крыла. Из анализа графиков следует, что с уве-

На рисунках 3, 4 приведены зависимости корректирующей ошибки  $\Delta x$  от различных значений коэффициентов  $k_{px}$ ,  $k_{dx}$  регулятора.

Можно отметить, что при определенных коэффициентах пропорционально-дифференциального регулятора при внешнем возмущении колебания системы в переходный период быстро затухают и аппарат восстанавливает равновесное состояние как по оси  $OX_0$  так и по оси  $OZ_0$ .

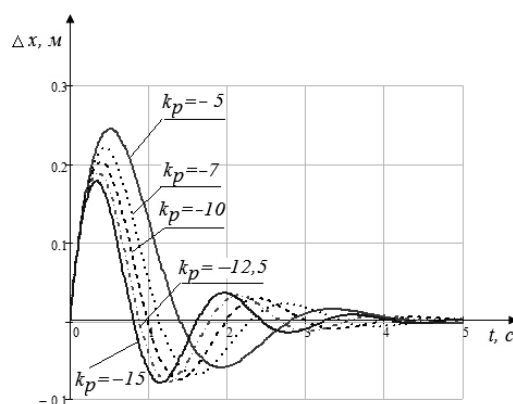


Рис. 4. График отклонения реального положения центра масс от заданного при начальной скорости  $v_0=1$  м/с;  $k_{dx}=1$  и различных  $k_{px}$

Fig.4. Diagram of the deviation of the actual position of the center of mass from the given position at the initial velocity  $v_0=1$  m/s;  $k_{dx}=1$  and various  $k_{px}$

личением  $\mu_x$ , ошибка, вызванная возмущением, существенно возрастает при сохранении устойчивого состояния и быстродействия.

На рис. 7-8 приведены зависимости отклонения реальной позиции конвертоплана от заданной по координате  $OZ_0$  при изменении значений коэффициента дифференциальной и пропорциональной составляющих регулятора САУ соответственно.

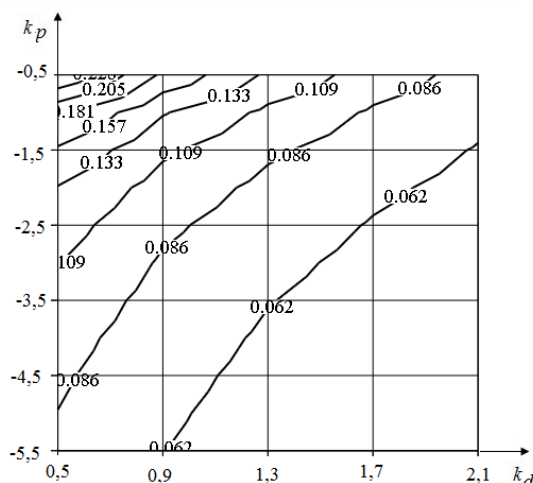


Рис. 5. График линий разного уровня для значений  $k_{px}$  и  $k_{dx}$  регулятора

Fig.5. Diagram of the lines of different level for values for  $k_{px}$  and  $k_{dx}$  of the control

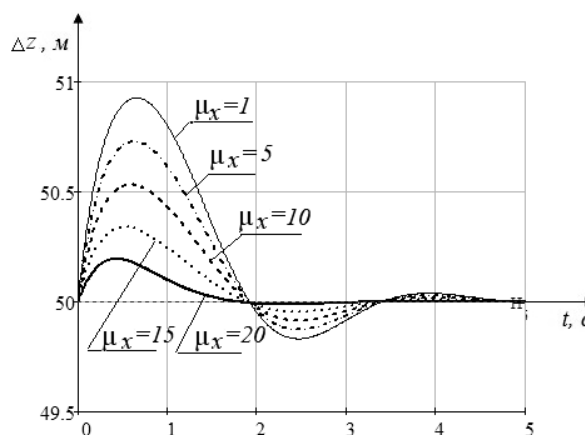


Рис.6. График отклонения реального положения центра масс по координате  $OZ_0$  от заданного (при  $v_{0z}=1$  м/с;  $v_{0y}=1$  м/с;  $H=50$  м;  $n_y=2$  с<sup>-2</sup> и различных коэффициентах  $\mu_x$ )

Fig.6. Diagram of the deviation of the actual position of the center of mass from the given position in  $OZ_0$  coordinate (if  $v_{0z}=1$  m/s;  $v_{0y}=1$  m/s;  $H=50$  m;  $n_y=2$  s<sup>-2</sup> and various ratios  $\mu_x$ )

Характер изменения графиков свидетельствует о существенном влиянии коэффициентов регулятора на характер переходного процесса в части амплитудных значений ошибки и времени пе-

реходного процесса. Для минимизации ошибки позиционирования необходимо решать задачу синтеза параметров регулятора, так же, как это выполнено для координаты  $OX_0$  (рис 6).

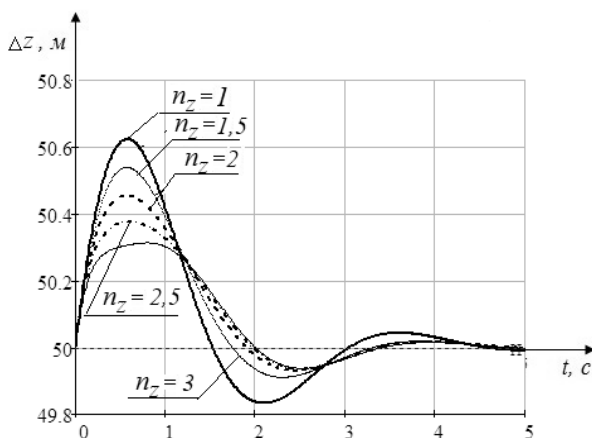


Рис.7. График отклонения реального положения центра масс по координате  $OZ_0$  от заданного (при  $v_{0y}=1$  м/с;  $H=50$  м;  $K_{pz}=-4$  с<sup>-2</sup> и различных коэффициентах  $n_z$ )

Fig.7. Diagram of the deviation of the actual position of the center of mass from the given position in  $OZ_0$  coordinate (if  $v_{0y}=1$  m/s;  $H=50$  m;  $K_{pz}=-4$  s<sup>-2</sup> and various ratios  $n_z$ )

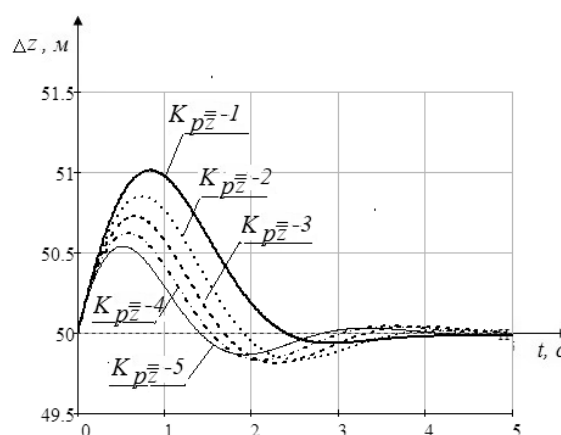


Рис.8. График отклонения реального положения центра масс по координате  $OZ_0$  от заданного. ( $v_{0y}=1$  м/с;  $H=50$  м;  $n_z=2$  с<sup>-2</sup> и различных коэффициентах  $K_{pz}$ )

Fig.8. Diagram of the deviation of the actual position of the center of mass from the given position in  $OZ_0$  coordinate (if  $v_{0y}=1$  m/s;  $H=50$  m;  $n_z=2$  s<sup>-2</sup> and various ratios  $K_{pz}$ )

## Выводы

В результате проведенных исследований разработана математическая модель пространственного движения конвертоплана-квадрокоптера с одновременным отклонением вектора тяги вращающихся винтов, предложена структурная модель устройства, состоящая из четырех вращающихся винтов и крыла, обеспечивающая высокие аэродинамические характеристики.

Особое внимание уделено изучению закономерностей автоматического движения аппарата в переходных режимах в момент, когда происходит переход из вертикального полета в горизонтальный. Определены отклонения реальной траектории от заданной как по вертикальной, так и по горизонтальной траекториям. Рассмотрен случай применения ПД регулятора.

Определены параметры минимизации средней квадратической ошибки.

## Список литературы

1. Salazar-Cruz S., Kendoul F., Lozano R., Fantoni, I. Real-time stabilization of a small three-rotor aircraft // IEEE Transactions on aerospace and electronic systems. 2008. 44(2).
2. Atsushi Oosedo, Satok o Abiko, Shota Narasaki, Atsushi Kuno, Atsushi Konno, Masaru Uchiyama. Flight control systems of a quad tilt rotor unmanned aerial vehicle for a large attitude change // Robotics and Automation (ICRA), IEEE International Conference on. 2015. P. 2326-2331.
3. Cai G. et al. First-principles modeling of a miniature tilt-rotor convertiplane in low-speed operation // Proc. Int. Micro Air Veh. Conf. Competition. 2016. С. 161-166.
4. Поляков Р. Ю. Разработка летательных робототехнических средств для мониторинга окружающей среды на основе бионических идей // Проблемы прогнозирования чрезвычайных ситуаций: материалы XIII науч.-практ. конф. М.: ФКУ Центр «Антистихия» МЧС России, 2014. С. 101-102.
5. Емельянова О. В. [и др.] Мобильный летательный комплекс для раннего обнаружения очагов возгорания // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2018. С. 38.
6. Патент на полезную модель № 157967, МПК В64С 25/62. Двигатель воздушный с изменяемым вектором тяги / Яцун С.Ф., Ефимов С.В., Мищенко В.Я., Яцун А.С., Емельянова О.В., Мартинез А. (РФ). № 2015131037/11 от 27.07.2015.
7. Патент на полезную модель №164555, МПК В64С 27/08. Летательный аппарат, выполненный по схеме трикоптера / Яцун С.Ф., Мищенко В.Я., Емельянова О.В., Савин А.И. (РФ). № 2015148004/11 от 09.11.2015.

8. Патент на полезную модель №166334, МПК В64С 27/08. Мультироторный аппарат с изменяемым вектором тяги / Яцун С.Ф., Мищенко В.Я., Емельянова О.В., Савин А.И. (РФ). № 2016107088/11 от 29.02.2016.

9. Патент на полезную модель №166334, МПК В64С 33/02. Орнитоптер / С.Ф. Яцун, В.Я. Мищенко, А. Мартинез, О.В. Емельянова (РФ). №2019102951 от 04.02.2019.

10. Сантьяго М. Л. А., Емельянова О. В., Яцун С. Ф. Исследование колебаний конвертоплана-квадрокоптера при переходном режиме в вертикальной продольной плоскости // Наука и образование: отечественный и зарубежный опыт. 2019. С. 23-31.

11. Мартинез Леон А.С. Разработка конструкции конвертоплана // Сборник научных трудов 2-й Международной научно-практической конференции: в 2 т. Курск, 2015. Т. 2. С. 265-268.

12. Математическое моделирование робота с переменным вектором тяги / В. Е. Павловский, С. Ф. Яцун, О. В. Емельянова, С. П. Стуканёва // Беспилотные транспортные средства с элементами искусственного интеллекта (БТС-ИИ-2015): труды второго всероссийского научно-практического семинара. СПб.: Изд-во «Политехника-сервис», 2015. С.99-106.

13. Яцун С. Ф., Емельянова О.В., Савин А.И. Моделирование движения квадрокоптера при отклонении осей несущих винтов относительно корпуса // Вибрационные технологии, мехатроника и управляемые машины: сб. науч. ст.: в 2ч. / Юго-Зап. гос. ун-т. Курск, 2014. Ч.1. С.329 - 338.

14. Jatsun S. et al. Control fligth of a UAV type tricopter with fuzzy logic controller // Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics). IEEE, 2017. С. 1-5.

15. Yatsun A., Lushnikov B., Emelyanova O. Motion Control Automation in the Quadcopter Convertiplane in a Transient Mode // International Russian Automation Conference (RusAutoCon). IEEE, 2018. С. 1-6.

16. Jatsyn S. F. et al. Mathematical model of the quadrotor type unmanned aerial vehicle with neurocontroller //Advances in Robotics, Mechatronics and Circuits: proc. of the 18th Int. Conf. on Circuits. 2014. С. 46-50.

17. Павловский М. А., Акинфиева Л. Ю., Бойчук О. Ф. Теоретическая механика: Динамика. Киев: Выща шк., 1990.

18. Синтез параметров электроприводов БПЛА типа конвертоплан–трикоптер/ О.В. Емельянова, Г.К. Казарян, А.С. Мартинез Леон, С.Ф. Яцун, С.П. Стуканева // IV Международная школа-конференция молодых ученых «Нелинейная динамика машин» School-NDM 2017: сборник трудов. М.: ИМАШ РАН, 2017. С. 239-249.

19. Ефремов А. В., Захарченко В. Ф., Овчаренко В. Н. Динамика полета / под ред. Г.С. Бюшгенса. М.: Машиностроение, 2011. 776 с.

20. Emelyanova O.V., Kazaryan G.K., Martinez Leon A.S., Jatsun S.F. The synthesis of electric drives characteristics of the UAV of “convertiplane – tricopter” type/MATEC Web Conf. Volume 99, 2017 2016 Workshop on Contemporary Materials and Technologies in the Aviation Industry (CMTAI2016). DOI: <http://dx.doi.org/10.1051/matecconf/20179902002>.

## References

1. Salazar-Cruz S., Kendoul F., Lozano R., Fantoni I. Real-time stabilization of a small three-rotor aircraft. IEEE Transactions on aerospace and electronic systems, 2008, 44(2).

2. Atsushi Oosedo, Satok o Abiko, Shota Narasaki, Atsushi Kuno, Atsushi Konno, Masaru Uchiyama. Flight control systems of a quad tilt rotor unmanned aerial vehicle for a large attitude change. Robotics and Automation (ICRA), 2015 IEEE International Conference on, pp. 2326–2331.

3. Cai G. et al. First-principles modeling of a miniature tilt-rotor convertiplane in low-speed operation. Proc. Int. Micro Air Veh. Conf. Competition, 2016, pp. 161–166.

4. Polyakov R. U. [Development of robotic aircraft for environmental monitoring based on bionic ideas]. *Materialy XIII nauch.-prakt. konf. "Problemy prognozirovaniya chrezvychaynykh situatsii" = [Proceedings of XIII scientific.-prakt. Conf. "Problems of emergency forecasting"]*. Moscow, 2014, pp. 101–102 (In Russ.).

5. Emelyanova O. V. at al. Mobil'nyi letatel'nyi kompleks dlya rannego obnaruzheniya ochagov vozgoraniya [Mobile aircraft complex for early detection of fires]. *Fundamental'nye i prikladnye problemy tekhniki i tekhnologii = Fundamental and applied problems of engineering and technology*, 2018, pp. 38 (In Russ.).

6. Yatsun S.F., Efimov S.V., Mishchenko V.Y., Jatsun A.S., Emelyanova O.V., Martinez A. Dvizhitel' vozdushnyi s izmenyaemym vektorom tyagi [The propulsion unit air with a changeable thrust vector]. Patent RF, no. 2015131037/11, 27.07.2015. (In Russ.).

7. Yatsun S.F., Mishchenko V.Y., Emelyanova O.V., Savin A.I. Letatel'nyi apparat, vypolnennyi po skheme trikoptera [The aircraft executed according to the scheme of a trikopter]. Patent RF, no. 2015148004/11, 09.11.2015. (In Russ.).

8. Yatsun S.F., Mishchenko V.Y., Emelyanova O.V., Savin A.I. Mul'tirotnyyi apparat s izmenyaemym vektorom tyagi [The multirotor device with a changeable vector of draft]. Patent RF, no. 2016107088/11, 29.02.2016. (In Russ.).

9. Yatsun S.F., Mishchenko V.Y., Martinez A., Emelyanova O.V. Ornitopter [Ornithopter]. Patent PF, no. 2019102951, 04.02.2019. (In Russ.).

10. Santiago M. L. A., Emelyanova O. V., Jatsun S. F. Issledovanie kolebanii konvertoplana-kvadroptera pri perekhodnom rezhime v vertikal'noi prodol'noi ploskosti [Study of oscillations of the tiltrotor-quadrocopter in the vertical longitudinal plane in the transition mode]. *Nauka i obrazovanie: otechestvennyi i zarubezhnyi opyt = Science and education: domestic and foreign experience*, 2019, pp. 23–31 (In Russ.).

11. Martinez Leon A. S. [Development of the tiltrotor design]. *Sbornik nauchnykh trudov 2-i Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii* [Collection of scientific papers of the 2nd International scientific and practical conference], Kursk, 2015, vol. 2, pp. 265–268 (In Russ.).

12. Pavlovsky V. E., Jatsun S. F., Emelyanova O. V., Stukaneva S. P. [Mathematical modeling of a robot with a variable thrust vector]. *Trudy Vtoroi vserossiiskii nauchno-prakticheskii seminara "Bespilotnye transportnye sredstva s elementami iskusstvennogo intellekta" (BTS-II-2015)" [Proceedings of the Second all-Russian scientific and practical seminar "Unmanned vehicles with elements of artificial intelligence" (BTS-2015)"]*. St. Petersburg, 2015, pp. 99–106 (In Russ.).

13. Jatsun S. F., Emelyanova O. V., Savin A. I. [Simulation of the movement of the quadcopter when the axis of the rotor are deflected relative to the body]. *Sb. nauch. st. "Vibratsionnye tekhnologii, mekhatronika i upravlyaemye mashiny"*. [Collection of scientific works "Vibration technology, mechatronics and managed machines"]. Kursk, 2014, part 1. pp. 329 – 338 (In Russ.).

14. Jatsun S. et al. Control flight of a UAV type tricopter with fuzzy logic controller. *Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics)*. 2017. IEEE, 2017, pp. 1–5.

15. Yatsun A., Lushnikov B., Emelyanova O. Motion Control Automation in the Quadcopter Convertiplane in a Transient Mode. *International Russian Automation Conference (RusAutoCon)*. IEEE, 2018, pp. 1–6.

16. Jatsyn S. F. et al. Mathematical model of the quadrotor type unmanned aerial vehicle with neurocontroller. *Advances in Robotics, Mechatronics and Circuits: proc. of the 18th Int. Conf. on Circuits*, 2014, pp. 46–50.

17. Pavlovsky M.A., Akinfeeva L.Y., Boichuk O.F. *Teoreticheskaya mekhanika: Dinamika* [Theoretical mechanics. Dynamics]. Kiev, *Vischa shkola Publ.*, 1990 (In Russ.).

18. Emelyanova O. V., Kazaryan G. K., Martinez Leon A.S., Jatsun S. F., Stukaneva S.P. [The Synthesis of Electric Drives Characteristics of the UAV of “Convertiplane–Tricopter”] *Sbornik trudov IV Mezhdunarodnoi shkola-konferentsii molodykh uchenykh "Nelineinaya dinamika mashin" School-NDM 2017* [Type. IV international school-conference of young scientists "Nonlinear dynamics of machines" School-NDM 2017: Proceedings]. Moscow, IMASH RAN Publ., 2017, pp. 239–249 (In Russ.).

19. Efremov A.V., Zakharchenko V. F., Ovcharenko V. N. *Dinamika poleta: uchebnik dlya studentov vysshih uchebnykh zavedenii* [Flight dynamics: a textbook for students of higher educational institutions]; ed. by Byushgen G. S. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2011, 776 p. (In Russ.).

20. Emelyanova O. V., Kazaryan G. K., Leon A. M., Jatsun S. F. (2017). The Synthesis of Electric Drives Characteristics of the UAV of “Convertiplane–Tricopter” Type. In *MATEC Web of Conferences*, vol. 99, p. 02002. EDP Sciences.

---

### Информация об авторах / Information about the Authors

**Яцун Сергей Фёдорович**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой механики, мехатроники и робототехники, ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск, Российская Федерация, e-mail: teormeh@inbox.ru

**Sergei F. Yatsun**, Doctor of Engineering Sciences, Professor, Head of the Department of Mechanics, Mechatronics and Robotics, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: teormeh@inbox.ru

**Лушников Борис Владимирович**, кандидат технических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск, Российская Федерация, e-mail: bvl\_61@inbox.ru

**Boris V. Lushnikov**, Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Department of Mechanics, Mechatronics and Robotics, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: bvl\_61@inbox.ru

**Емельянова Оксана Викторовна** кандидат технических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск, Российская Федерация, e-mail: oks-emelyanova@yandex.ru

**Oksana V. Emelyanova**, Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Mechanics, Department of Mechanics, Mechatronics and Robotics Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: oks-emelyanova@yandex.ru

**Стуканева Светлана Павловна**, магистрант, ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск, Российская Федерация, e-mail: stuksvetlana@yandex.ru

**Svetlana P. Stukaneva**, Undergraduate, Mechanics, Department of Mechanics, Mechatronics and Robotics, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: stuksvetlana@yandex.ru