

## Оригинальные статьи / Original articles

<https://doi.org/10.21869/2223-1560-2019-23-3-65-73>

## Определение коэффициента интенсивности напряжений в балке с центральной трещиной и оценка критической длины трещины

А. В. Масалов <sup>1</sup>✉

<sup>1</sup> ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», ул. 50 лет Октября, 94, г. Курск, 305040, Российская Федерация

✉ e-mail: masalow.al@ya.ru

### Резюме

**Цель исследования.** Предложить аналитический способ определения коэффициента интенсивности напряжений по второй форме разрушения в балке с трещиной. Использование полученного решения, при наличии экспериментальной базы значений критических коэффициентов интенсивности напряжений позволит учитывать влияние трещин и трещиноподобных повреждений, обнаруженных в балках при обследованиях.

**Методы.** Предлагается способ вычисления коэффициента интенсивности напряжений по второй форме разрушения (поперечный сдвиг) в балках, с помощью аналитического метода - известного в сопротивлении материалов и строительной механике метода сечений. Для этого с использованием гипотез распределения нормальных и касательных напряжений по поперечным и продольным сечениям составляются условия равновесия мысленно отсечённых частей изгибаемого элемента. Подобная методика расчёта может быть применена при оценке несущей способности деревянных балок, имеющих эксплуатационные повреждения – расслоения клеевых швов, усушечные и силовые трещины.

**Результаты.** С использованием предложенной методики сделана оценка критического размера сквозной, не выходящей на торец трещины в деревянной балке при кратковременном нагружении. В качестве исходных данных для расчёта приняты экспериментальные данные, полученные автором.

**Заключение.** Для практического применения этой методики следует на основании экспериментальных данных подобрать значения тарировочных коэффициентов, наилучшим образом дающие совпадение теоретического решения с экспериментальными данными. Кроме этого, в дальнейшем экспериментальном исследовании необходимо получение и уточнение зависимостей критического коэффициента интенсивности напряжений от эксплуатационных факторов: длительности нагружения, влажности древесины, размеров сечения, положения трещины, соотношения глубины трещины и общей ширины сечения элементов.

**Ключевые слова:** деревянная балка; метод сечений; коэффициент интенсивности напряжений; критическая длина трещины.

**Конфликт интересов:** Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Для цитирования:** Масалов А. В. Определение коэффициента интенсивности напряжений в балке с центральной трещиной и оценка критической длины трещины // Известия Юго-Западного государственного университета. 2019; 23(3): 65-73. <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2019-23-3-65-73>.

Статья поступила в редакцию 21.03.2019

Статья подписана в печать 06.05.2019

© Масалов А. В., 2019

Известия Юго-Западного государственного университета / Proceedings of the Southwest State University. 2019; 23(3): 65-73

## Determination of Stress Intensity Factor in a Beam with a Central Crack and Estimation of the Critical Crack Length

Aleksandr V. Masalov <sup>1</sup> ✉

<sup>1</sup> Southwest State University, 94, 50 Let Oktyabrya str., Kursk, 305040, Russian Federation

✉ e-mail: masalow.al@ya.ru

### Abstract

**Purpose of research.** Propose an analytical method for determining the stress intensity factor for the second form of fracture in a beam with a crack. It will be possible to take into account the influence of cracks and crack-like damage found in beams during surveys using the solution obtained, in the presence of an experimental base of values of the critical stress intensity factors.

**Methods.** It is proposed a method for calculating the stress intensity factor for the second form of fracture (transverse shear) in the beams using the analytical method known in the resistance of materials and structural mechanics of the section method. To do this, equilibrium conditions are created for mentally cut parts of a bent element using the hypotheses of the distribution of normal and tangential stresses along transverse and longitudinal sections. This method of calculation can be applied in assessing the carrying capacity of wooden beams that have operational damage, such as laminations of adhesive joints and trimmed and force cracks.

**Results.** Using the proposed technique, we have estimated the critical size of a through-going that does not reach the end of a wooden beam under short-term loading. The experimental data obtained by the author are taken as the initial data for the calculation.

**Conclusion.** For the practical application of this technique, on the basis of experimental data, the values of the calibration coefficients should be selected that match the theoretical solution with the experimental data best of all. In addition, in a further experimental study, it is necessary to obtain and refine the dependencies of the critical stress intensity factor on operational factors: loading duration, wood moisture, cross-sectional dimensions, crack position, crack depth ratio and total cross-sectional width of elements.

**Keywords:** wooden beam; method of sections; stress intensity factor; critical crack length.

**Conflict of interest.** The author declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

**For citation:** Masalov A. B. Determination of Stress Intensity Factor in a Beam with a Central Crack and Estimation of the Critical Crack Length. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta = Proceedings of the Southwest State University*. 2019, 23(3): 65-73 (In Russ.). <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2019-23-3-65-73>.

Received 21.03.2019

Accepted 06.05.2019

\*\*\*

### Введение

При анализе напряжённо-деформированного состояния элементов строительных конструкций, в том числе и деревянных, обычно исходят из гипотезы сплошности материала [1, 2]. Возмож-

ные отклонения от этой гипотезы учитывают коэффициентами условий работы. Опыт эксплуатации конструкций показывает, что в реальности часто в конструкциях появляются повреждения в виде трещин и другие повреждения,

по своему характеру схожие с трещинами – трещиноподобные повреждения [3, 4]. Это весьма характерно для конструкций из древесины. Использование аппарата механики разрушения для анализа напряжённо-деформированного состояния позволит уточнить результаты оценки несущей способности элемента.

Расчёты элементов с трещиноподобными дефектами могут производиться с использованием теории линейной механики разрушения [5- 9]. В этом случае вычисляют коэффициент интенсивности напряжений (КИН). Для проверки несущей способности делают сравнение вычисленного КИН с его критическим значением для данного материала, которое получают экспериментально. Задачу вычисления КИН в настоящее время обычно решают численными методами [6, 7]. Использование метода сечений для вычисления КИН было сделано в работе [8] только для первой формы разрушения (нормальный отрыв).

В данной работе применён аналогичный подход для вычисления КИН по второй форме разрушения (поперечный сдвиг).

**Цель работы** – предложить аналитический способ определения коэффициента интенсивности напряжений по второй форме разрушения в балке с трещиной.

## Материалы и методы

Рассмотрим балку со сквозной трещиной длиной  $s$  посередине (рис. 1,а), решим задачу в предположении упругого поведения материала. Рассмотрим

отдельно действие изгибающего момента  $M_c$  и поперечной силы  $F/2$  (рис. 1б и 1в) вблизи вершины трещины. Рассмотрим действие изгибающего момента  $M_c$  (рис.1г). Отсечём продольной плоскостью на уровне нейтрального слоя нижнюю часть балки и заменим её действие касательными напряжениями  $\tau_M$ . Согласно условию равновесия, по цельному сечению балки распределены нормальные напряжения  $\sigma_M$ . Если считать форму распределения нормальных напряжений по высоте сечения независимой от способа приложения нагрузки (принцип Сен-Венана), то их максимальное значение в месте вершины трещины,  $\sigma_M = \frac{M_c}{W}$ , где  $W$  – момент сопротивления сечения. На самом деле, закон распределения нормальных напряжений по цельному сечению приобретает вид, показанный на эпюре  $\sigma_M$  только на расстоянии  $\beta h$  от вершины трещины. Значение коэффициента  $\beta \geq 1$  требует уточнения.

Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось должна быть равна нулю. Следовательно, равнодействующая сила от  $\sigma_M$  для верхней части балки уравнивается равнодействующей от  $\tau_M$ ,

$$\sum X = T_{\tau_M} - T_{\sigma_M} = 0. \quad (1)$$

Для определения равнодействующей от  $\tau_M$  примем гипотезу распределения

$$\tau_M = \frac{K_{IM}}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{\beta h}} \right), \quad (2)$$

где  $K_{IIIM}$  – КИН от действия изгибающего момента  $M_c$  в месте вершины трещины;

$x$  – горизонтальная координата с началом в точке вершины трещины, причём  $x \leq \beta h$ .

Распределение  $\tau_M$ , согласно этой зависимости, показано на рис.1,г.

Определим значение равнодействующей  $T_\tau$  от  $\tau_M$  с учётом (2)

$$T_{\tau M} = \int_0^{\beta h} \tau_M dx = \int_0^{\beta h} \left( \frac{K_{IIIM}}{\sqrt{\pi x}} - \frac{K_{IIIM}}{\sqrt{\pi h}} \right) dx = K_{IIIM} \sqrt{\frac{\beta h}{\pi}}. \quad (3)$$

Равнодействующая  $T_\sigma$  от  $\sigma_M$  в верхней части балки

$$T_{\sigma M} = \frac{3}{2} \frac{M_c}{bh}. \quad (4)$$

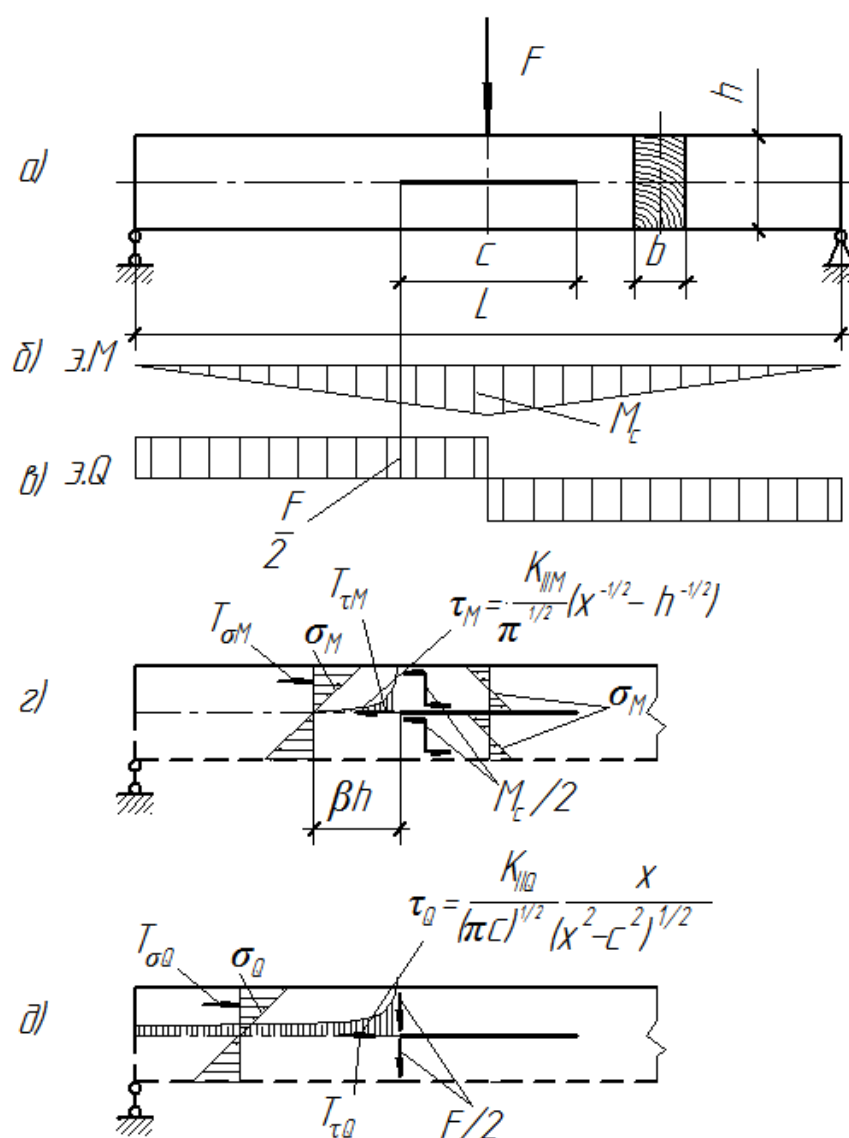


Рис.1. К определению коэффициента интенсивности напряжений

Fig.1. To the determination of stress-intensity factor

Согласно (1), (3) и (4)

$$K_{IIIM} = \frac{3}{2} \frac{M_c}{bh} \sqrt{\frac{\pi}{\beta h}} = \frac{3}{2} \frac{F}{bh} \sqrt{\pi c} \frac{L}{4\sqrt{c\beta h}}. \quad (5)$$

Формулу (5) можно привести к виду

$$K_{IIIM} = \tau \sqrt{\pi c} Y_M, \quad (6)$$

где  $\tau = \frac{3}{2} \frac{F}{bh}$  – номинальное касательное напряжение на уровне нейтрального слоя балки, подсчитанное по формуле Журавского;

$$Y_M = \frac{L}{4\sqrt{c\beta h}} - \text{К-тарировка.}$$

Рассмотрим действие поперечной силы  $F$  (рис.1д). Аналогично предыдущему решению отсечём продольной плоскостью на уровне нейтрального слоя нижнюю часть балки и заменим её действие касательными напряжениями  $\tau_Q$ . Согласно условию равновесия по сечениям балки вплоть до опоры, распределены нормальные напряжения  $\sigma_Q$ . Их максимальное значение в сечении, соответствующем вершине трещины

$$\sigma_Q = \frac{Fc}{4W} = \frac{3}{2} \frac{Fc}{bh^2}. \quad (7)$$

Равнодействующая сила этих напряжений равна

$$T_{\sigma Q} = \frac{3Fc}{8bh}. \quad (8)$$

Примем гипотезу распределения касательных напряжений [1]:

$$\tau_Q = \tau_K \frac{x}{\sqrt{x^2 - c^2}}, \quad (9)$$

$$\tau_K = \frac{K_{IIQ}}{\sqrt{\pi c}}, \quad (10)$$

где  $K_{IIQ}$  – КИН II от действия поперечной силы, начало координатной оси  $x$  на торце балки.

Определим величину равнодействующей  $T_{\tau Q}$  от касательных напряжений:

$$T_{\tau Q} = \int_c^L \tau_Q dx = 2K_{IIQ} \sqrt{\frac{L^2 - c^2}{\pi c}}. \quad (11)$$

Из условия равенства нулю проекций всех сил на горизонтальную ось  $x$  запишем  $\Sigma X = T_{\sigma Q} - T_{\tau Q} = 0$  и уравнений (8), (9) и (10) следует

$$K_{IIQ} = \tau \sqrt{\pi c} Y_Q, \quad (12)$$

где  $Y_Q = \alpha \frac{c}{8\sqrt{L^2 - c^2}}$  – вторая К-тарировка; коэффициент  $\alpha$  учитывает особенности поведения древесины.

Согласно решениям задач (рис.1г и рис.1д), К-тарировку, учитывающую действие изгибающего момента и поперечной силы, определим как

$$Y = Y_M + Y_Q = \frac{L}{4\sqrt{c\beta h}} + \frac{\alpha c}{8\sqrt{L^2 - c^2}}, \quad (13)$$

Следовательно,  $K_{II}$  можно определить как

$$K_{II} = K_{IIIM} + K_{IIQ} = \tau \sqrt{\pi c} (Y_M + Y_Q). \quad (14)$$

или

$$K_{IIc} = \tau \sqrt{\pi c} \left( \frac{L}{4\sqrt{c\beta h}} + \frac{\alpha c}{8\sqrt{L^2 - c^2}} \right). \quad (15)$$

Для прямоугольного сечения

$$K_{IIc} = \frac{3F}{4bh} \sqrt{\pi c} \left( \frac{L}{4\sqrt{c\beta h}} + \frac{\alpha c}{8\sqrt{L^2 - c^2}} \right). \quad (16)$$

## Результаты и их обсуждение

Выполним оценку критического размера трещины для расчётной схемы, представленной на рис.1. Под критическим размером трещины будем понимать её наибольшую длину, когда она ещё не оказывает влияния на несущую способность элемента. Для уточнения полученной формулы (16) следует точнее определять коэффициенты  $\beta$  и  $\alpha$ , учитывающие особенности распределения напряжений в древесине. В приведенной оценке примем коэффициенты  $\beta=1$  и  $\alpha=1$ .

Примем следующие кратковременные механические характеристики древесины для расчёта, полученные в ходе наших испытаний [6]: прочность на скалывание при изгибе  $R_s=4,5$  МПа, прочность на растяжение при изгибе  $R_b=45$  МПа, критический коэффициент интенсивности напряжений по второй

форме разрушения  $K^{IIc}=1,4$  МПа·м<sup>1/2</sup>. Пролёт балки  $L=5$ м, ширина  $b=0,13$ м, высота прямоугольного сечения  $h$  принимает значения 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8м.

Кратковременная разрушающая нагрузка от скалывания при изгибе:

$$F_s = \frac{2}{3} b h R_s = 195 \text{ кН}. \quad (17)$$

Кратковременная разрушающая нагрузка от растяжения при изгибе:

$$F_b = \frac{2}{3} \frac{b h^2 R_b}{L} = 195 \text{ кН}. \quad (18)$$

Решаем уравнение (16) относительно  $c$  – длины сквозной центральной трещины, принимая значение  $F$  минимальным из значений (17) и (18) – в данном частном примере они равны. На основании нескольких результатов решения строим график зависимости длины критической трещины  $c_{cr}$  и отношения высоты сечения к пролёту балки  $h/L$  (рис.2).

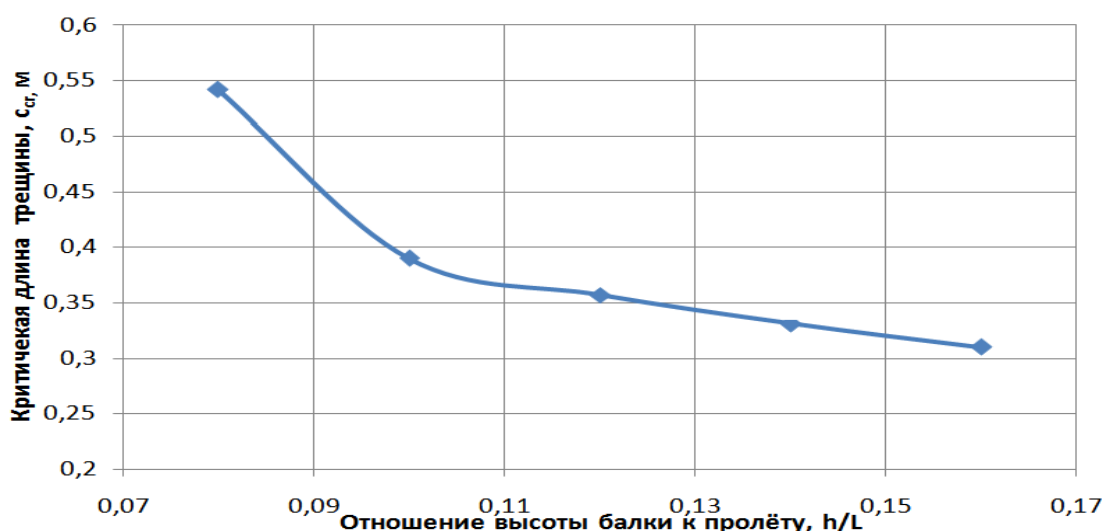


Рис.2. Зависимость критической длины трещины от отношения высоты сечения балки к её пролёту

Fig. 2. Dependence of the critical crack length on the ratio of the height of the beam section to its span

## Выводы

Для практического применения этой методики следует на основании экспериментальных данных подобрать значения тарировочных коэффициентов, наилучшим образом дающие совпадение теоретического решения с экспериментальными данными. Кроме этого, в дальнейшем экспериментальном

исследовании необходимо получение и уточнение зависимостей критического коэффициента интенсивности напряжений от эксплуатационных факторов: длительности нагружения, влажности древесины, размеров сечения, положения трещины, соотношения глубины трещины и общей ширины сечения элементов.

## Список литературы

1. Дубракова К.О., Галаева Д.Х. Нелинейные деформации статически определенных деревянных конструкций // Ресурсосбережение и экология строительных материалов, изделий и конструкций: сборник научных трудов Международной научно-практической конференции. Курск, 2018. С. 145-150.
2. Оценка напряжений в балках при изгибе по их прогибу / А.А. Сморчков, С.А. Кереб, Д.А. Орлов, А.В. Козлов, К.О. Барановская // Математические методы и инновационные научно-технические разработки: сборник. Курск, 2014. С. 78-81.
3. Дубраков С.В., Сморчков А.А., Кереб С.А. Дефекты и повреждения деревянных конструкций от силовых и средовых факторов // Дефекты зданий и сооружений. Усиление строительных конструкций-XXI: сборник материалов научно-методической конференция ВИТУ, посвященной 90-летию со дня рождения профессора В.Т. Гроздова. Воронеж, 2017. С. 152-157.
4. Травуш В.И., Колчунов В.И., Дмитриева К.О Экспериментально-теоретическое исследование прочности и устойчивости сжатых стержней из древесины при силовом и средовом воздействии // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. 2016. № 3 (363). С. 280-285.
5. Партон В.В., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. 2-е изд. перераб. и доп. М.: Наука, 1985. 504 с.
6. Barrett J.D., Foschi R.O. Mode II stress-intensity factors for cracked wood beams // Eng. Fr. Mech. 1977. Vol. 9. P.371-378.
7. Murphy J.F. Strength of wood beams with end splits // Forest Prod. Lab. Research Pap.-1979, FPL 347.
8. Морозов Е.М. Метод сечений в теории трещин // Известия вузов. Строительство и архитектура, 1969. №3. С.22-25.

9. Stupishin L., Kabanov V., Masalov A. Mode II stress intensity factor determination for cracked timber beams/ *Advances in Civil, Architectural, Structural and Constructional Engineering* – Kim, Jung & Seo (Eds), Taylor & Francis Group, London, 2016. ISBN 978-1-138-02849-4.

10. Масалов А.В. Трещиностойкость изгибаемых клееных деревянных элементов: автореф. дисс. ... канд. техн. наук. Воронеж, 1992.

### Reference

1. Dubrakova K.O., Galayeva D.Kh. [Nonlinear deformations of statically definable timber structures]. *Sbornik nauchnykh trudov Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii "Resursosberezhenie i ekologiya stroitel'nykh materialov, izdelii i konstruktsii"*. [Collection of Scientific Works of the International Scientific and Practical Conference "Resource Saving and Ecology of Building Materials, Products and Structures"]. Kursk, 2018, pp. 145-150 (In Russ.).

2. Smorchkov A.A., Kereb S.A., Orlov D.A., Kozlov A.V., Baranovskaya K.O. [Evaluation of stresses in beams during bending along their deflection]. *Sbornik "Matematicheskie metody i innovatsionnye nauchno-tekhnicheskie razrabotki"* [Collection "Mathematical methods and innovative scientific and technical developments"]. Kursk, 2014, pp. 78-81 (In Russ.).

3. Dubrakov S.V., Smorchkov A.A., Kereb S.A. [Defects and damage to timber structures from force and environmental impacts]. *Defekty zdaniy i sooruzheniy. Usilenie stroitel'nykh konstruktsiy-XXI. Sbornik materialov nauchno-metodicheskoi konferentsii VITU*. [Defects of buildings and structures. Strengthening of building structures-XXI. Collection Scientific and Methodological Conference of VITU]. Voronezh, 2017, pp. 152-157 (In Russ.).

4. Travush V.I., Kolchunov V.I., Dmitrieva K.O. Eksperimental'no-teoreticheskoe issledovanie prochnosti i ustoychivosti szhatykh sterzhnei iz drevesiny pri silovom i sredovom vozdeistvii [Experimental and theoretical study of the strength and stability of compressed wood rods under force and environmental impact]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Tekhnologiya tekstil'noi promyshlennosti = News of higher educational institutions. Technology textile industry*, 2016, no. 3 (363), pp. 280-285 (In Russ.).

5. Parton V.V., Morozov E.M. Mekhanika uprugoplasticheskogo razrusheniya: ucheb. posobie dlya studentov universitetov i vtuzov [Mechanics of elastoplastic destruction: studies. manual for students of universities and technical colleges]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 504 p. (In Russ.).

6. Barrett J.D., Foschi R.O. Mode II stress-intensity factors for cracked wood beams. *Eng. Fr. Mech.* 1977, vol.9, pp.371-378.



7. Murphy J.F. Strength of wood beams with end splits. Forest Prod. Lab. Research Pap, 1979, FPL 347.
8. Morozov E.M. Metod sechenii v teorii treshchin [The method of sections in the theory of cracks]. *Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo i arkhitektura = Construction and architecture*, 1969, no. 3, pp.22-25 (In Russ.).
9. Stupishin L., Kabanov V., Masalov A. Mode II: Stress intensity factor for the construction of civil engineering, Kim, Jung & Seo (Eds), Taylor & Francis Group, London, 2016. ISBN 978-1-138-02849-4.
10. Masalov A.V. Treshchinostoikost' izgibaemykh kleenykh derevyannykh elementov . Avtoreferat diss. kand. tekhn. nauk [Crack resistance of bend glued wooden elements. Kand. eng. sci. abstract diss.]. Voronezh, 1992 (In Russ.).

---

### Информация об авторах / Information about the Authors

**Масалов Александр Васильевич**, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры промышленного и гражданского строительства, ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск, Российская Федерация, e-mail: masalow.al@ya.ru

**Alexander V. Masalov**, Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Department of Industrial and Civil Engineering, Southwest State University, Kursk, Russian Federation  
e-mail: masalow.al@ya.ru