УДК 519.876.2

И.В. Буркова, д-р техн. наук, доцент, в.н.с., Институт РАН проблем управления им. В.А. Трапезникова (Россия, 117342, Москва, ул. Профсоюзная, 65) (e-mail: irbur27@gmail.com)

Б.К. Уандыков, канд. техн. наук, Институт РАН проблем управления им. В.А. Трапезникова (Россия, 117342, Москва, ул. Профсоюзная, 65) (e-mail: vlab17@bk.ru)

Ю.А. Халин, канд. техн. наук, ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет» (Россия, 305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94) (e-mail: yur-khalin@yandex.ru)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СЕТЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

В статье рассматривается применение метода сетевого программирования к решению дискретной задачи минимизации стоимости проекта при заданной продолжительности его реализации. Суть метода состоит в том, что целевую функцию и ограничение в задаче календарного планирования можно представить в виде суперпозиции более простых функций. Такое представление удобно изображать в виде сети, на нижнем уровне которой находятся вершины, соответствующие переменным (входы сети), промежуточные вершины соответствуют функциям, входящим в суперпозицию, а конечная вершина (выход) соответствует исходной функции.

Задачи календарного планирования очень распространены на практике и при этом относятся к классу NP-трудных, что делает актуальной разработку алгоритмов их решения. В работе описаны два базовых алгоритма решения задачи для случаев независимых и последовательных работ. Более сложные случаи (сеть типа дерева и агрегируемая сеть) могут быть представлены в виде комбинации этих случаев и решаются на основе последовательного применения базовых алгоритмов. В качестве примера производственного сетевого графика приводится сеть типа «сборка с комплектующими». Для нее предлагается метод, который состоит в определении множества работ, фиксация продолжительности которых приводит к одному из рассмотренных выше случаев (либо сеть-дерево, либо – агрегируемая сеть). Далее рассматриваются все возможные варианты фиксации продолжительностей работ выделенного множества и решение задачи для каждого варианта. Из всех вариантов выбирается лучший.

Предложенные в статье алгоритмы могут быть полезны в управлении проектами, в частности – при решении задач календарного планирования.

Ключевые слова: *продолжительность работ; стоимость работ; сетевой график дерево; агрегируемая сеть; метод сетевого программирования.*

DOI: 10.21869/2223-1560-2018-22-5-119-126

Ссылка для цитирования: Буркова И.В., Уандыков Б.К., Халин Ю.А. Применение метода сетевого программирования в задачах календарного планирования // Известия Юго-Западного государственного университета. 2018. Т. 22, № 5(80). С. 119-126.

***

Введение

Задачи календарного планирования относятся, как правило, к сложным (NP-трудным) задачам дискретной оптимизации ([1-8] и др.). В статье рассматривается так называемая задача оптимизации сети по стоимости. Она заключается в определении стоимости выполнения работ проекта так, чтобы проект был выполнен за определенное время, а суммарная стоимость работ была минимальной. При этом для каждой работы имеется конечное число вариантов ее выполнения, отличающихся величиной стоимости и величиной продолжительности выполнения. Без ограничения общности в статье рассматривается случай, когда для каждой работы имеется два варианта.

Предложенные алгоритмы могут быть полезны в системах поддержки принятия решений [9-11].

Постановка задачи

Рассмотрим сетевой график, содержащий n работ (работы изображаются вершинами). Обозначим τ_i – продолжительность *i*-й работы. Для каждой работы *i* задана величина Δ_i возможного сокращения ее продолжительности и затраты s_i на это сокращение. Обозначим T_k – продолжительность проекта (длина критического пути) при продолжительностях работ τ_i, *T* – требуемая продолжительность проекта ($Q = T_k - T$ – требуемое сокращение). Обозначим $x_i = 1$, если продолжительность работы i сокращается, $x_i = 0$ в противном случае.

Задача. Определить $\left\{x_i; i = \overline{1,n}\right\}$ так, чтобы продолжительность проекта была не более *T*, а суммарные затраты на уменьшение продолжительности проекта

$$S(x) = \sum_i s_i x_i \to \min \qquad (1)$$

были минимальными.

Будем рассматривать пять вариантов сетевых графиков.

1. Независимые работы

В этом случае задача принимает вид: минимизировать (1) при ограничениях (2).

$$x_i \Delta_i \ge \tau_i - T, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

Задача легко решается. Оптимальное решение имеет вид

$$x_i = \begin{cases} 0, \text{ если } \tau_i \le T \\ 1, \text{ если } \tau_i > T \end{cases}, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (3)$$

Этот алгоритм назовем базовым алгоритмом 1. В дальнейшем нам потребуется его параметрическая реализация, т.е. параметрическая зависимость минимальных затрат $S(Y)$ от продолжительности проекта *Y*, где величина *Y* меняется в пределах

$$\max_i \left(\tau_i - \Delta_i\right) \le Y \le \max_i \tau_i. \qquad (4)$$

Пример 1. Имеются 6 работ, данные о которых приведены в табл. 1.

Таблица 1

Данные о работах

i	1	2	3	4	5	6
τ_i	5	9	8	10	6	7
Δ_i	2	5	4	7	2	3
s_i	3	7	6	12	4	5

Вычисляем $4 \le Y \le 10$. Таблица вариантов имеет вид:

Таблица 2

Зависимость $S(Y)$ от Y

Вариант	0	1	2	3	4	5	6
Y	10	9	8	7	6	5	4
$S(Y)$	0	12	19	25	30	34	37

2. Последовательные работы (сетевой график-путь)

В этом случае ограничение задачи (1) принимает вид:

$$\sum_i x_i \Delta_i \ge Q. \qquad (5)$$

Этот и последующие случаи решаются методом сетевого программирования, который будет рассмотрен ниже.

Получение параметрической зависимости $S(Y)$ для последовательности работ будем называть базовым алгоритмом 2.

3. Сетевой график-дерево

Сетевой график типа дерева, как правило, соответствует процессам сборки сложных изделий (рис. 1).

4. Агрегируемый сетевой график

Агрегируемым называется сетевой график, который путем замены последовательных и (или) параллельных работ одной работой можно свести к одной работе (рис. 2).

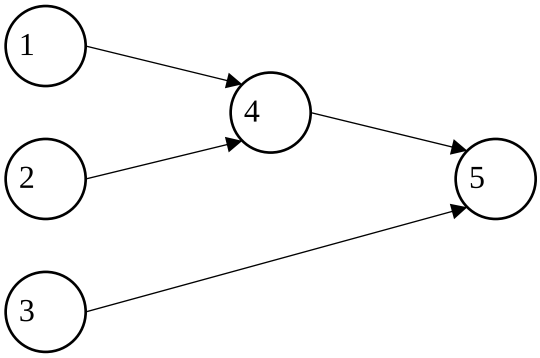

Рис. 1

На рис. 2 две работы – 2 и 3 можно заменить одной работой (2, 3) (эти работы независимые, т.е. параллельные). Затем последовательность работ 1→(2,3) →4→5 можно также заменить одной работой.

5. Сетевой график «сборка с комплектацией»

Мы не будем рассматривать общий случай производственного сетевого графика, а ограничимся сетевым графиком типа «сборка с комплектацией» (рис. 3). К дереву сборки добавляются работы 1, 2 и 3, производящие необходимые комплекты для сборки.

Метод сетевого программирования

Суть метода сетевого программирования состоит в том, что целевую функцию и ограничение в задаче календарного планирования можно представить в виде суперпозиции более простых функций.

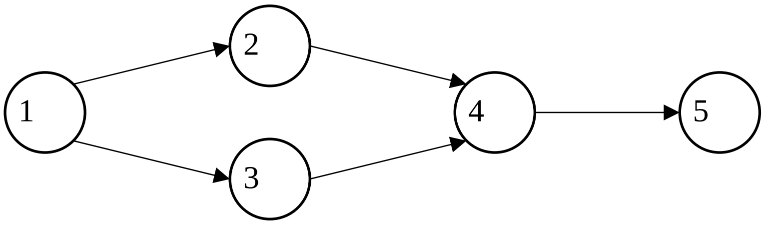

Рис. 2

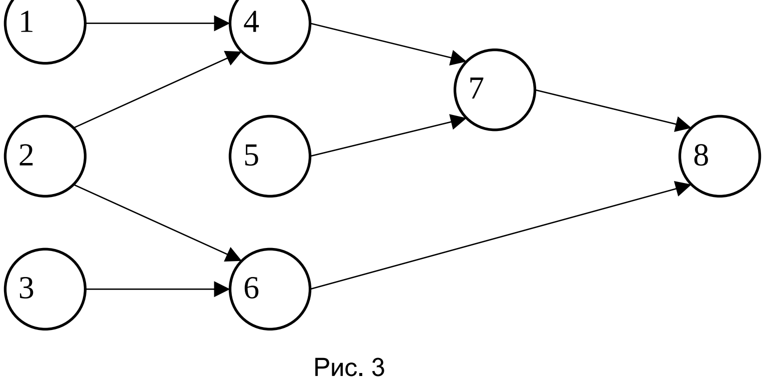

Рис. 3

Такое представление удобно изображать в виде сети, на нижнем уровне которой находятся вершины, соответствующие переменным (входы сети), промежуточные вершины соответствуют функциям, входящим в суперпозицию, а конечная вершина (выход) соответствует исходной функции.

Метод применим, если и целевая функция, и ограничение имеют одинаковые сетевые представления. Если сетевое представление имеет вид дерева, то метод дает оптимальное решение задачи. В противном случае получаем верхнюю (нижнюю) оценку, которую можно использовать в методе ветвей и границ [12]. Метод сетевого программирования подробно изложен в [12]. Поэтому дадим иллюстрацию его работы на примере последовательности работ (вариант 2).

Пример 2. Проект состоит из четырех последовательных работ, данные о которых приведены ниже (табл. 3).

Таблица 3

Данные о работах

i	1	2	3	4
τ_i	5	6	9	8
Δ_i	2	3	5	4
s_i	7	8	4	6

Пусть $T = 20$, $Q = 28 - 20 = 8$.

Задача имеет вид:

$$7x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 6x_4 \to \min$$

при ограничении

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 \geq 8.$$

Возьмем структуру сетевого представления, приведенную на рис. 4.

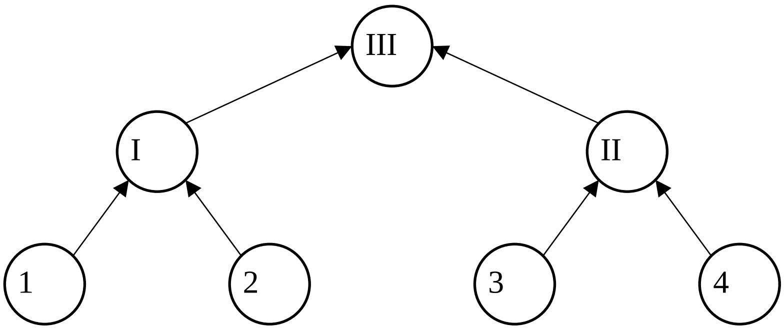

Рис. 4

1 шаг. Рассматриваем работы 1 и 2. Решение приведено ниже.

1	8; 3	15; 5
0	0	47; 2
2 / 1	0	1

Первое число в клетке – это затраты, а второе – сокращение продолжительности. Результаты сведены в таблицу 4.

Таблица 4

Объединенная работа I

Вариант	0	1	2	3
Затраты	0	7	8	15
Сокращение продолжительности	0	2	3	5

2 шаг. Рассматриваем работы 3 и 4. Решение приведено ниже.

1	6; 4	10; 9
0	0	4; 5
2 / 1	0	1

Результат сведены в таблицу 5.

Таблица 5

Объединенная работа II

Вариант	0	1	2
Затраты	0	4	10
Сокращение продолжительности	0	5	9

3 шаг. Рассматриваем объединенные работы I и II. Решение приведено ниже.

2	10; 9	17; 11	18; 12	25; 14
1	4; 5	11; 7	12; 8	19; 10
0	0	7; 2	8; 3	15; 5
2 / 1	0	1	2	3

Результаты сведены в таблицу 6.

В результате получили параметрическую таблицу $S(Y)$. Для $Y \geq Q = 8$ имеем: $Y = 9, S(9) = 10$, что соответствует сокращению продолжительностей работ 3 и 4.

Таблица 6

Объединенная работа III

Вариант	0	1	2	3	4	5
Затраты	0	4	10	17	18	25
Сокращение продолжительности	0	5	9	11	12	14

Фактически мы рассматриваем случай последовательных работ, т.е. базовый алгоритм 2. Далее покажем, как на основе базовых алгоритмов 1 и 2 решать задачу для вариантов 3, 4 и 5.

Сетевой график-дерево

Рассмотрим рис. 1. Работы 1 и 2 являются параллельными, поэтому применим алгоритм 1. Объединенная работа I = (1, 2) и работа 4 являются последовательными, поэтому применяем алгоритм 2. Получаем объединенную работу II = (I, 4). Теперь параллельными являются объединенная работа II и работа 3. Применяем алгоритм 1. Получаем объединенную работу III = (II, 3). Наконец объединенная работа III и работа 5 являются последовательными, поэтому применяем алгоритм 2. Само решение получаем методом обратного хода [12].

Агрегируемый сетевой график

В данном случае также применяем последовательность базовых алгоритмов. Так на рис. 2 работы 2 и 3 являются параллельными – применяем алгоритм 1. Получаем объединенную работу I = (2, 3). Теперь работы 1, I, 4 и 5 являются последовательными – применяем базовый алгоритм 2. Алгоритм естественно обобщается на случай любой агрегируемой сети.

Сетевой график «сборка с комплектацией»

Идею алгоритма поясним на примере сети (рис. 3). Если зафиксировать продолжительность работы 2, то без учета этой работы получаем сетевой график-дерево, и можно применить алгоритм пункта 4 (при дополнительном ограничении на моменты начала работ 4 и 6). Работа 2 имеет две возможных продолжительности – τ_2 и $\tau_2 - \Delta_2$. Для каждого варианта решаем задачу алгоритмом из пункта 4. Из двух вариантов выбираем лучший.

В общем случае определяем множество *R* работ, фиксация продолжительности которых превращает сеть в дерево. Далее рассматриваем все варианты фиксации продолжительностей работ этого множества (число вариантов равно 2^q, где q – число работ множества *R*). Решаем задачу для каждого варианта, из которых выбираем лучший.

Заключение

Предложенный способ решения задач календарного планирования, основанный на методе сетевого программирования, позволяет использовать простые алгоритмы, легко поддающиеся программной реализации. При сетевой структуре типа дерева мы получаем точное решение задачи, а в общем случае – верхнюю или нижнюю оценку для использования в методе ветвей и границ. При большом количестве работ (больше 8) метод дает заметный выигрыш по времени реализации по сравнению с методом перебора или динамического программирования.

Рассмотренные в статье алгоритмы использовались при составлении календарных планов реализации проектов в «Роскосмосе».

Список литературы

1. Сетевые модели и задачи управления / В.Н. Бурков, Б.Д. Ланда, С.Е. Ловецкий [и др.]. М.: Советское радио, 1967. 144с.

2. Математические основы управления проектами / С.А. Баркалов, И.В. Буркова, В.И. Воропаев [и др.]; под ред. В.Н. Буркова. М.: Высшая школа, 2005. 423 с.

3. Andres C., Hatami S. Evolutionary heuristics and an algorithm for the two-stage assembly scheduling problem to minimize makespan with setup times // International Journal of Production Research. 2011. 44. Pp. 4713-4735.

4. Allaoui H., Artiba A. Johnson’s algorithm: a kay to solve optimally or approximately flow shop scheduling problems with unavailability periods // International Journal of Production Economics. 2009. 121. Pp. 81-87.

5. Chenkong V., Haimes Y.Y. The tree stage assembly permutation flowshop scheduling problem. Proceedings of the 5th International Conference on Industrial Engineering and Industrial Management, Cartagena. September 7-9, 2011.

6. Demeulemeester E.L., Herroelen W., Project scheduling: a research handbook. Kluwer Academic Publisher, 1976. P. 710.

7. Garey M.R. The complexity of flowshop and jobshop scheduling // Mathematics of Operations Research 1976. №1 (2). Pp. 117-129.

8. Sun Y., Zhang C.Y., Gao L., Wang X.J. Multy-objactive optimization algorithms for flow shop scheduling problem: a review and prospects // International Journal of Advanced Manufacturing Technology. 2011. 55. Pp. 723-739.

9. Лисицин Л.А., Халин Ю.А., Лисицин А.Л. Системы поддержки принятия управленческих решений в условиях неполной информации // Известия Юго-

Западного государственного университета. 2012. № 4-2 (43). С. 95-99.

10. Халин Ю.А., Сизов А.С., Игнатенко А.Н. Нечётко-множественная модель многокритериальной оценки конкурентоспособности предприятия // Известия Юго-Западного государственного университета. 2011. № 5-1 (38). С. 53-57.

11. Кузьбожев Э.Н., Можейко А.Г., Халин Ю.А. Управление инновационными процессами на основе интеллектуальных информационных технологий // Известия Юго-Западного государственного университета. 2011. № 6-2 (39). С. 83-86.

12. Буркова И.В. Метод сетевого программирования в задачах нелинейной оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2009. № 10. С. 15-21.

Поступила в редакцию 10.08.18

UDC 519.876.2

I. V. Burkova, Doctor of Engineering Sciences, Associate Professor, Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences named after V. A. Trapeznikov (Russia, Moscow, Profsoyuznaya Str., 65) (e-mail: irbur27@gmail.com

B. K. Uandykov, Candidate of Engineering Sciences, Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences named after V. A. Trapeznikov (Russia, Moscow, Profsoyuznaya Str., 65) (e-mail: vlab17@bk.ru)

Yu.A. Khalin, Candidate of Engineering Sciences, Southwest State University (Russia, 305040, Kursk, 50 Let Oktyabrya Str., 94) (e-mail: yur-khalin@yandex.ru)

THE NETWORK PROGRAMMING METHOD APPLICATION IN THE SCHEDULING TASKS

The article considers the application of the network programming method to the solution of the discrete problem of minimizing the cost of the project for a given duration of its implementation. The essence of the method is that the target function and the restriction in the scheduling problem can be represented as a superposition of simpler functions. This representation is convenient to depict in the form of a network, at the lower level of which there are vertices corresponding to variables (network inputs), intermediate vertices correspond to the functions included in the superposition, and the final vertex (output) corresponds to the original function.

Calendar planning tasks are very common in practice and at the same time belong to the class of NP-difficult. This makes the development of algorithms for their solution actual. The paper describes two basic algorithms for solving the problem for the cases of independent and sequential works. More complex cases (tree-type network and an aggregated network) can be represented as a combination of these cases and solved based on sequential application of basic algorithms. As an example of a production network is given a network of the type "Assembly with a components". For it the method which consists in definition of a set of works which fixing of duration leads to one of the cases considered above (tree-type network or aggregated network) is offered. Next all possible options for fixing the duration of the work of the selected set and the solution of the problem for each option are considered. The best of all the options is chosen.

The algorithms proposed in paper may be useful in the of the project management, particularly in solving scheduling tasks.

Key words: *work duration; work cost; tree-type network; aggregated network; network programming method.*

DOI: 10.21869/2223-1560-2018-22-5-119-126

For citation: Burkova I. V., Uandykov B. K., Khalin Yu.A. The Network Programming Method Application in the Scheduling Tasks. Proceedings of the Southwest State University, 2018, vol. 22, no. 5(80), pp. 119-126 (in Russ.).

***

Reference

1. Burkov V.N., Landa B.D., Loveckij S.E. i dr. Setevye modeli i zadachi upravleniya. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1967, 144 p.

2. Barkalov S.A., Burkova I.V., Voropaev V.I. i dr. Matematicheskie osnovy upravleniya proektami; ed. by Burkov V.N. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2005, 423 p.

3. Andres C., Hatami S. Evolutionary heuristics and an algorithm for the two-stage assembly scheduling problem to minimize makespan with setup times. *International Journal of Production Research*, 2011, no. 44, pp. 4713-4735.

4. Allaoui H., Artiba A., Johnson's algorithm: a kay to solve optimally or approximately flow shop scheduling problems with unavailability periods. *International Journal of Production Economics*, 2009, no. 121, pp. 81-87.

5. Chenkong V., Haimes Y.Y. The tree stage assembly permutation flowshop scheduling problem. Proceedings of the 5th International Conference on Industrial Engineering and Industrial Management, Cartagena, September 7-9, 2011.

6. Demeulemeester E.L., Herroelen W. Project scheduling: a research handbook. Kluwer Academic Publisher, 1976, p. 710.

7. Garey M.R. The complexity of flowshop and jobshop scheduling. *Mathematics of Operations Research*, 1976, no. 1 (2), pp. 117-129.

8. Sun Y., Zhang C.Y., Gao L., Wang, X.J. Multy-objactive optimization algorithms for flow shop scheduling problem: a review and prospects. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2011, no. 55, pp. 723-739.

9. Lisicin L.A., Halin YU.A., Lisicin A.L. Sistemy podderzhki prinyatiya upravlencheskih reshenij v usloviyah nepolnoj informacii. *Izvestija Jugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta*, 2012, no. 4-2 (43), pp. 95-99.

10. Halin Yu.A., Sizov A.S., Ignatenko A.N. Nechyotko-mnozhestvennaya model' mnogokriterial'noj ocenki konkurentosposobnosti predpriyatiya. *Izvestiya Jugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta*, 2011, no. 5-1 (38), pp. 53-57.

11. Kuz'bozhev Eh.N., Mozhejko A.G., Halin Yu.A. Upravlenie innovacionnymi processami na osnove intellektual'nyh informacionnyh tekhnologij. *Izvestija Jugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta*, 2011, no. 6-2 (39), pp. 83-86.

12. Burkova I.V. Metod setevogo programmirovaniya v zadachah nelinejnoj optimizacii. *Avtomatika i telemekhanika*, 2009, no. 10, pp. 15-21.