УДК 629.4.015, 621.534, 62.752

С.В. Елисеев, д-р техн. наук, профессор, Иркутский государственный университет путей сообщения (ИрГУПС) (Россия, 664074, Иркутск, ул. Чернышевского, 15) (e-mail: eliseev_s@inbox.ru)

А.С. Миронов, соискатель, Иркутский государственный университет путей сообщения (ИрГУПС) (Россия, 664074, Иркутск, ул. Чернышевского, 15) (e-mail: art.s.mironov@mail.ru)

К.Ч. Выонг, аспирант, Иркутский государственный университет путей сообщения (ИрГУПС) (Россия, 664074, Иркутск, ул. Чернышевского, 15) (e-mail: trucvq1990@gmail.com)

ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ КОНТАКТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В СОСТАВНОМ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ ПРИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ

Предлагается концепция оценки динамических состояний в механических колебательных системах, создаваемых взаимодействиями сочлененных элементов. Предполагается, что в реальных конструктивных решениях упругие, диссипативные и массоинерционные элементы не всегда соединяются кинематическими парами, обеспечивающими удерживающие или двухсторонние связи. Такие ситуации характерны для многих транспортных и технологических вибрационных машин. Цель статьи заключается в разработке и детализации метода построения математических моделей взаимодействия типовых элементов (или звеньев) механических колебательных систем для определения возникающих в соединениях динамических реакций связей. Методы достижения цели построены на использовании техники и приемов структурного математического моделирования, когда сопоставляется эквивалентная, в динамическом отношении, система автоматического управления. Разработана технология преобразования структурных моделей, позволяющая для характерных контактирующих точек сформировать динамические реакции связей, как произведения динамической жесткости системы в определенной точке на ее динамическое смещение. Используются понятия передаточных функций систем. Показано, что динамические реакции в отдельных точках системы представляют собой дробно-рациональные выражения, значения которых могут изменяться в широких пределах в зависимости от частот внешнего возмущения. Нулевые значения реакций связей определяют режимы, при которых возможен «разрыв» кинематической связи. При наличии или учете постоянных сил, предельное состояние достигается при условиях, учитывающих действие дополнительных силового фактора. Авторами предлагается введение понятия об отношении динамических реакций в различных точках системы, что формирует определенные информационные пространства. Предлагаются методика и приемы оценки динамических состояний в соединениях элементов систем в задачах оценки возможного спектра ожидаемых динамических состояний.

Ключевые слова: *неудерживающие связи; передаточные функции системы; структурные схемы; динамические реакции связей; коэффициент передачи динамических связей.*

DOI: 10.21869/2223-1560-2018-22-5-14-23

Ссылка для цитирования: Елисеев С.В., Миронов А.С., Выонг К.Ч. Особенности формирования контактных взаимодействий в составном твердом теле при вынужденных колебаниях // Известия Юго-Западного государственного университета. 2018. Т. 22, № 5(80). С. 14-23.

***

Введение

Особенности действия вибраций в соединениях элементов технологических и транспортных машин отличаются большим разнообразием, что нашло отражение во многих задачах динамики технических объектов, в том числе и в задачах вибрационной защиты [1, 2].

Наиболее развитые подходы в оценке динамических свойств основаны на использовании физических моделей технических объектов в виде механических колебательных систем с сосредоточенными параметрами. Теоретический базис в решении задач динамики механических колебательных систем различной природы и его развитие ориентированы на учет специфики и особенностей динамических состояний упругих механических систем и связаны с разработкой различных направлений в современной теории колебаний [2, 3].

Внимание к механическим колебательным системам как физическим моделям технических объектов, работающих при интенсивном динамическом нагружении, вполне оправдано и позволяет с достаточной достоверностью оценивать динамические возможности создаваемых машин [4]. Переход от механических колебательных систем к математическим моделям может быть реализован на основе различных методов, отражающих, в том числе, особенности электрических и механических цепей, а также и систем автоматического управления [2, 3, 5].

В большинстве случаев, математические модели, создаваемые на основе механических колебательных систем, совершающих малые колебания относительно положения устойчивого равновесия, рассматриваются в классе линейных дифференциальных уравнений, получаемых в результате упрощения объектов. Вместе с тем, контактные взаимодействия, возникающие между элементами, не всегда являются двусторонними или удерживающими, что может приводить к эффектам, нежелательным в работе машин, оборудования и аппаратуры.

Неудерживающие (или односторонние) связи – достаточно известное и распространенное динамическое явление, получившее применение и в практических реализациях вибрационных технологических процессов [5, 6]. Если динамика обычных механических колебательных систем, в которых доминируют двусторонние связи, достаточно изучена, то эффекты, создаваемые при контактировании элементов систем при неудерживающих связях, еще не получили должного уровня детализации представлений, хотя многие особенности динамических взаимодействий нашли отражение в работе [6].

В предлагаемой статье рассматриваются возможности создания метода построения математических моделей линейных систем с неудерживающими связями, основанного на использовании понятий о динамических реакциях связей, возникающих под действием различных внешних возмущений и создающих при определенных сочетаниях параметров системы условия для нарушения контактов.

I. Некоторые общие положения

Рассматривается механическая колебательная система с одной степенью свободы, которая совершает вынужденные вертикальные колебания в системе координат, связанной с неподвижным базисом. Объект в виде массоинерционного элемента (m) состоит из двух частей (m_1, m_2) общей массой m; упругими элементами являются линейные пружины с жесткостями k_1, k_2. В качестве внешних возмущений рассматривается внешняя гармоническая сила $Q(t)$, приложенная к объекту (m), а также кинематические возмущения $z_1(t)$, $z_2(t)$, создаваемые гармоническими колебаниями опорных поверхностей (I, II – рис. 1).

Особенностью объекта m является то, что он разделен на две части m_1 и m_2, которые находятся в состоянии контакта по поверхности, перпендикулярной оси вертикального движения. Колебания системы происходят относительно положения статического равновесия; в характерных точках системы тт. (A), (A_1), (A_2), (A_3), в которых возникают статические и динамические реакции связей.

При рассмотрении возникающих колебательных движений используется математическая модель в виде дифференциального уравнения в операторной форме, полученная в соответствии с методикой, приведенной в [2, 3],

$$\bar{y}mp^2 + \bar{y}(k_1 + k_2) = k_1\bar{z}_1 + k_2\bar{z}_2 + \bar{Q}, \quad (1)$$

где $p = j\omega$ – комплексная переменная ($j = \sqrt{-1}$); значок «–» над переменной означает ее изображение по Лапласу.

Структурная схема (или структурная математическая модель) эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления приведена на рис. 2, и состоит из объекта m в виде интегрирующего звена второго рода, охваченного цепями обратных отрицательных связей. На рис. 2, *а*, *б* показаны общая (*а*) и детализированная (*б*) структурные схемы.

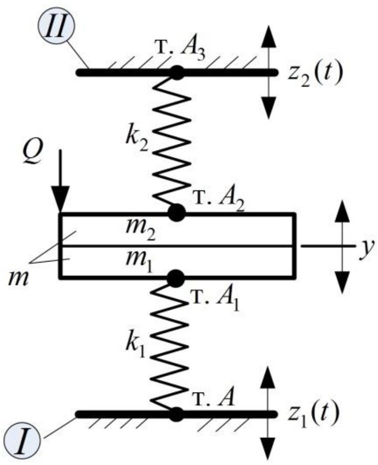

Рис. 1. Принципиальная схема системы при наличии неудерживающей связи в зоне контакта массоинерционных элементов m1 и m2

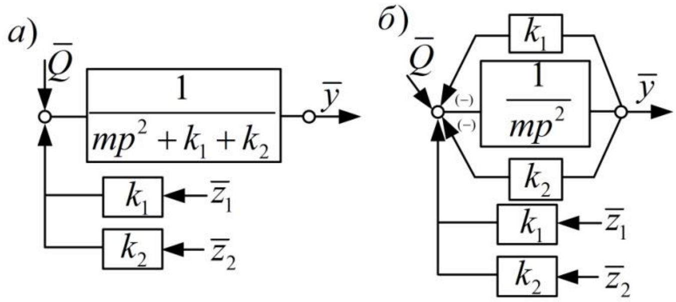

Рис. 2. Структурная схема (структурная математическая модель) исходной системы по рис. 1: а – схема общего вида; б – детализированная схема

Передаточные функции системы, используя структурные схемы на рис. 2, *а*, *б*, можно представить в следующем виде:

$$W_{1}(p)\Big|_{\substack{\bar{z}_1=0\\ \bar{z}_2=0}} = \frac{\bar{y}}{\bar{Q}} = \frac{1}{mp^2 + k_1 + k_2}, \quad (2)$$

$$W_{1}(p)\Big|_{\substack{\bar{Q}=0\\ \bar{z}_2=0}} = \frac{\bar{y}}{\bar{z}_1} = \frac{k_1}{mp^2 + k_1 + k_2}, \quad (3)$$

$$W_{1}(p)\Big|_{\substack{\bar{Q}=0\\ \bar{z}_1=0}} = \frac{\bar{y}}{\bar{z}_2} = \frac{k_2}{mp^2 + k_1 + k_2}, \quad (4)$$

что обеспечивает возможности оценки и статических и динамических реакций связей системы.

II. Оценка динамических свойств

1. Рассматривается случай, когда на объект действует внешняя гармоническая сила *Q(t)*. Статические реакции оцениваются в характерных точках (тт. (A) ÷ (A_3)) при действии силы тяжести $G = mg$, где $g = 9.81$ *м/с*^{2} (земное ускорение). В силу специфики механической колебательной системы статические реакции обладают свойствами

$$\left|\bar{R}_A\right| = \left|\bar{R}_{A_1}\right| \quad (5)$$

$$\left|\bar{R}_{A_2}\right| = \left|\bar{R}_{A_3}\right|. \quad (6)$$

В свою очередь, с учетом передаточной функций (2), полагая, что $\bar{z}_1 = 0$, $\bar{z}_2 = 0$, получим

$$\bar{R}_{A\text{ст}} = \frac{\bar{G} \cdot k_1}{k_1 + k_2} = \frac{mgk_1}{k_1 + k_2}, \qquad (7)$$

$$\bar{R}_{A_2\text{ст}} = \frac{\bar{G} \cdot k_2}{k_1 + k_2} = \frac{mgk_2}{k_1 + k_2}. \qquad (8)$$

Что касается динамических реакций связей в характерных точках, то они определяются соответственно

$$\bar{R}_{A\text{дин}} = \frac{\bar{Q} \cdot k_1}{mp^2 + k_1 + k_2}, \qquad (9)$$

$$\bar{R}_{A_2\text{дин}} = \frac{\bar{Q} \cdot k_2}{mp^2 + k_1 + k_2}. \qquad (10)$$

Из выражений (9), (10) следует, что динамические реакции связей в характерных точках зависят от частоты внешней силы и могут принимать отрицательные и положительные значения. На частоте

$$\omega^2_{\text{соб}} = \frac{k_1 + k_2}{m}, \qquad (11)$$

система может входить в резонансный режим, в котором динамические реакции меняют свой знак и при прохождении резонанса достигают больших значений. Общие или полные реакции в характерных точках систем представляют собой сумму двух компонент. Поскольку динамические реакции могут принимать отрицательные и положительные значения, то, при определенных условиях, можно ожидать, что и полные реакции могут «обнуляться» и принимать отрицательные значения.

2. Для оценки динамического состояния объекта m, состоящего из двух контактирующих частей m_1 и m_2, введем понятие об отношении полных динамических реакций в характерных точках системы – тт. (A) и (A_2). Обозначим такой коэффициент как $N(\omega)$, который можно понимать как характеристику динамичности через отношение полных реакций связей:

$$N(\omega) = \frac{\bar{R}_{A_2\text{полн}}}{\bar{R}_{A_1\text{полн}}}, \qquad (12)$$

где числитель и знаменатель (12) могут быть представлены выражениями:

$$\bar{R}_{A_2\text{полн}} = \frac{(k_1 + k_2)k_2(mg \pm Q_0) + k_2 mgmp^2}{(k_1 + k_2)(mp^2 + k_1 + k_2)}, \qquad (13)$$

$$\bar{R}_{A_1\text{полн}} = \frac{(k_1 + k_2)k_1(mg \pm Q_0) + k_1 mgmp^2}{(k_1 + k_2)(mp^2 + k_1 + k_2)}, \qquad (14)$$

здесь Q_0 – максимальная амплитуда гармонического силового воздействия.

Таким образом, можно построить выражение для определения коэффициента динамичности реакций связей:

$$N(\omega)_{\text{полн}} = \frac{(k_1 + k_2)k_2\left(1 \pm \frac{Q_0}{mg}\right) + k_2 mp^2}{(k_1 + k_2)k_1\left(1 \pm \frac{Q_0}{mg}\right) + k_1 mp^2}. \qquad (15)$$

Из анализа (15) следует, что числитель и знаменатель могут принимать нулевые значения, а также положительные и отрицательные. В данном случае в числителе и знаменателе всегда будут различные знаки, поскольку динамические реакции $\bar{R}_{A_1\text{дин}}$ и $\bar{R}_{A_2\text{дин}}$ направлены в противоположные стороны.

3. Введем в рассмотрение коэффициент связи силовых факторов $V = 1 - Q_0 / mg$. Если $V = 0$ ($mg = Q_0$), то выражение (15) принимает соответственно вид

$$N(\omega)_{\text{полн}} = \frac{k_2}{k_1}. \qquad (16)$$

Определение условий нарушения контакта в соединении инерционных элементов полных m_1 и m_2, связано с рассмотрением реакций в характерных точках (A_1) и (A_2). Если полная реакция $\overline{R}_{A_1 \text{полн}}$, то в этом случае движению элемента m_2 препятствий не оказывается и на частоте «зануления» полной реакции $\overline{R}_{A_1 \text{полн}}$ становится возможным «разблокирование» контакта. Аналогичная ситуация может рассматриваться и для полной реакции в характерной точке (A_2). В этом случае частота «обнуления» $\overline{R}_{A_2 \text{полн}}$ предопределяет возможности нарушения контакта в соединении элементов m_1 и m_2, поскольку для движения элемента m_1 устраняется препятствие в виде полной реакции связи в т. (A_2).

Общая схема движения объекта m такова, что при любом движении (вверх или вниз – рис. 1) динамические реакции всегда будут отличаться друг от друга динамическими состояниями (либо сжимается упругий элемент с жесткостью k_1, и второй упругий элемент с жесткостью k_2 – растягивается; либо ситуация конвертируется). Поэтому в выражениях (13) и (14) предусматривается возможность выбора соответствующих знаков (+) или (-). Это означает, что в выражениях $N(\omega)$ должно соблюдаться соотношение: либо числитель $N(\omega)$ имеет знак (+) и знаменатель – знак (-) в полиномах, состоящих из двух частей, либо будет другая комбинация со сменой расположения знаков в числителе и знаменателе.

Если в контакте между элементами m_1 и m_2 имеется некоторая упругость, реализуемая специальной пружиной или упругой прослойкой, то система в этом случае приобретает еще одну степень свободы. Таким образом, расчетной схемой становится механическая колебательная система с двумя степенями свободы. При этом в предельных соотношениях параметров (при жесткости упругого взаимодействия элементов бесконечно больших значений), должны проявляться признаки соответствия результатов оценки динамических состояний.

III. Динамические свойства составных твердых тел: предельные переходы

1. Если в предыдущем разделе рассматривалось твердое тело массой m, составные элементы которого m_1 и m_2, представляет особое «некоторое цельное» соединение, то продолжение исследования производится для случая, когда элементы m_1 и m_2 связаны линейной пружиной с коэффициентом жесткости k_0, как показано на рис. 3.

Система имеет две степени свободы и описывается двумя координатами y_1 и y_2 в неподвижном базисе. К каждому из массоинерционных элементов прикладывается сила тяжести: соответственно $G_1 = m_1 g$, $G_2 = m_2 g$, что в соответствующих характерных точках (тт. (A) ÷ (A_5)) вызывает формирование статических составляющих полных реакций связей.

В механической колебательной системе (рис. 3) внешние воздействия представлены гармоническими колебаниями $z_1(t)$ и $z_2(t)$ опорных поверхностей I и II (рис. 3). Силы тяжести G_1 и G_2 приложены непосредственно к массоинерционным элементам (на рис. 3 силы G_1 и G_2 не показаны). Внешние гармонические силы $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ являются синфазными, имеют одну частоту колебаний так же, как и кинематические возмущения $z_1(t)$ и $z_2(t)$. Внешние силы $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ также приложены к соответствующим массоинерционным элементам. Система дифференциальных уравнений движения в координатах y_1 и y_2 во временной области может быть построена на основе известных подходов [2, 3] и имеет вид

$$m_1\ddot{y}_1 + y_1(k_1+k_0) - y_2 k_0 = G_1 + Q_1(t) + k_1 z_1(t)\,, \quad (17)$$

$$m_2\ddot{y}_2 + y_2(k_2+k_0) - y_1 k_0 = G_2 + Q_2(t) + k_2 z_2(t)\,. \quad (18)$$

Используя преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях, система уравнений (17), (18) может быть трансформирована в операторную форму

$$\bar{y}_1(m_1p^2 + k_1 + k_0) - \bar{y}_2 k_0 = \bar{G}_1 + \bar{Q}_1 + k_1\bar{z}_1\,, \quad (19)$$

$$\bar{y}_2(m_2p^2 + k_2 + k_0) - \bar{y}_1 k_0 = \bar{G}_2 + \bar{Q}_2 + k_2\bar{z}_2\,. \quad (20)$$

Структурная схема (структурная математическая модель) системы по рис. 3 представлена на рис. 4.

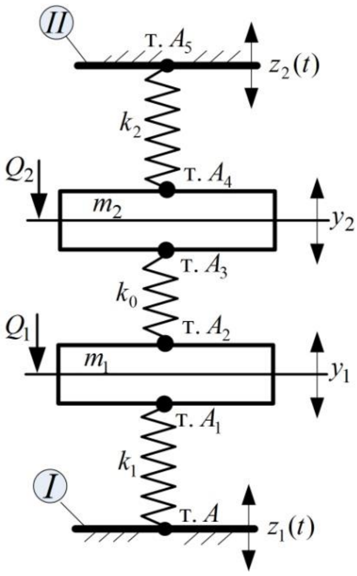

Рис. 3. Принципиальная схема системы с двумя степенями свободы

На основе структурной схемы (рис. 4) могут быть построены передаточные функции при соответствующих внешних воздействиях:

$$W_{1\,\substack{\bar{z}_1=0\\ \bar{z}_2=0\\ \bar{Q}_2=0}}(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} = \frac{m_2p^2 + k_2 + k_0}{A(p)}\,, \quad (21)$$

$$W_{2\,\substack{\bar{z}_1=0\\ \bar{z}_2=0\\ \bar{Q}_2=0}}(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1} = \frac{k_0}{A(p)}\,, \quad (22)$$

$$W'_{1\,\substack{\bar{z}_1=0\\ \bar{z}_2=0\\ \bar{Q}_1=0}}(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_2} = \frac{k_0}{A(p)}\,, \quad (23)$$

$$W'_{2\,\substack{\bar{z}_1=0\\ \bar{z}_2=0\\ \bar{Q}_1=0}}(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_2} = \frac{m_1p^2 + k_1 + k_0}{A(p)}\,, \quad (24)$$

$$W''_{1\,\substack{\bar{z}_2=0\\ \bar{Q}_1=0\\ \bar{Q}_2=0}}(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{z}_1} = \frac{k_1(m_2p^2 + k_2 + k_0)}{A(p)}\,, \quad (25)$$

$$W''_{2\,\substack{\bar{z}_2=0\\ \bar{Q}_1=0\\ \bar{Q}_2=0}}(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{z}_1} = \frac{k_0k_1}{A(p)}\,, \quad (26)$$

$$W'''_{1\,\substack{\bar{z}_1=0\\ \bar{Q}_1=0\\ \bar{Q}_2=0}}(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{z}_2} = \frac{k_0k_2}{A(p)}\,, \quad (27)$$

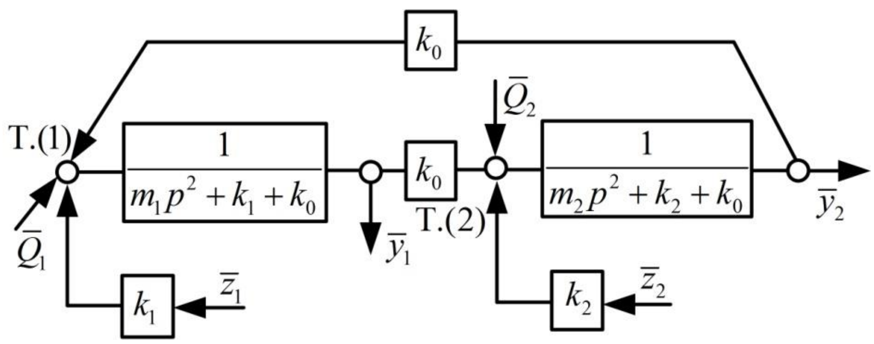

Рис. 4. Структурная схема (структурная математическая модель) исходной системы по рис. 3

$$W_{2}'''(p)\Big|_{\substack{\bar{z}_1=0\\ \bar{z}_2=0\\ \bar{Q}_2=0}} = \frac{\bar{y}_2}{\bar{z}_2} = \frac{k_2(m_1p^2+k_1+k_0)}{A(p)}, \qquad (28)$$

где $A(p) = (m_1p^2+k_1+k_0)(m_2p^2+k_2+k_0)-k_0^2$ (29) – частотное характеристическое уравнение системы.

Выражения (21) ÷ (28) используются для определения реакций связей в характерных точках системы в соответствии с методикой, приведенной в работе [7]. Определим статические реакции, вызванные действием сил тяжести $\bar{G}_1$ и $\bar{G}_2$ (эти силы приложены на входах в структурной схеме, приведенной на рис. 3). Полагая, что $\left|\bar{R}_A\right|_{\text{ст}} = \left|\bar{R}_{A_1}\right|_{\text{ст}}$, а $\left|\bar{R}_{A_4}\right|_{\text{ст}} = \left|\bar{R}_{A_5}\right|_{\text{ст}}$, найдем реакции связей

$$\bar{R}_{A\text{ст}} = \frac{k_1(k_2+k_0)m_1g + k_0m_2gk_1}{A_1}, \qquad (30)$$

$$\bar{R}_{A_5\text{ст}} = \frac{k_2(k_1+k_0)m_2g + k_0m_1gk_2}{A_1}, \qquad (31)$$

где $A_1 = (k_1+k_0)(k_2+k_0)-k_0^2 =$

$$k_1k_2 + k_1k_0 + k_0k_2. \qquad (32)$$

Таким образом, статические составляющие полных реакций связей в характерных точках системы т. (A) и т. (A_5) определятся выражениями

$$\bar{R}_{A\text{ст}} = \frac{g[k_1(k_2+k_0)m_1 + k_0k_1m_2]}{k_1k_2 + k_0(k_1+k_2)}, \qquad (33)$$

$$\bar{R}_{A_5\text{ст}} = \frac{g[k_2(k_1+k_0)m_2 + k_0k_2m_1]}{k_1k_2 + k_0(k_1+k_2)}. \qquad (34)$$

Сложность выражений (33), (34) определяется тем, что величины статических реакций в т. (A) и т. (A_5) формируются под действием двух сил тяжести $G_1 = m_1g$ и $G_2 = m_2g$ (на структурной схеме, приведенной на рис. 4 силы $\bar{G}_1$ и $\bar{G}_2$ не показаны).

2. Динамические реакции связей в тт. (A) и (A_5) определяются действием внешних возмущений $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$ и $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$. В отличие от действия сил тяжести $\bar{G}_1$ и $\bar{G}_2$, которые действуют совместно, внешние возмущения могут действовать каждое по отдельности или в соответствующих совместных формах. Отметим, что каждая из форм совместных одновременных возмущений будет сопровождаться своим набором параметров. Далее рассматриваются несколько случаев.

3. Полагая, что $\bar{Q}_1 \neq 0$, $\bar{Q}_2 = 0$, $\bar{z}_1 = 0$, $\bar{z}_2 = 0$, получим выражения для динамических составляющих полных реакций связей в характерных точках (A) и (A_5):

$$\bar{R}_{A\text{дин}}\Big|_{\substack{\bar{z}_1=0\\ \bar{z}_2=0\\ \bar{Q}_2=0}} = \frac{k_1(m_2p^2+k_2+k_0)}{A(p)}\bar{Q}_{10}, \qquad (35)$$

$$\bar{R}_{A_5\text{дин}}\Big|_{\substack{\bar{z}_1=0\\ \bar{z}_2=0\\ \bar{Q}_2=0}} = \frac{k_2k_0}{A(p)}\bar{Q}_{10}, \qquad (36)$$

где $\bar{Q}_{10}$ – представляет собой максимальную амплитуду колебаний гармонического внешнего воздействия. Таким образом, полная реакция связи в точках (A) и (A_5) составит:

$$\bar{R}_{A\text{полн}} = \frac{g[k_1(k_2+k_0)m_1 + k_0k_1m_2]}{A_1} \pm$$

$$\pm \frac{k_1(m_2p^2+k_2+k_0)\bar{Q}_{10}}{A(p)}, \qquad (37)$$

$$\bar{R}_{A_5\text{полн}} = \frac{g[k_2(k_1+k_0)m_2 + k_0k_2m_1]}{A_1} \pm \frac{k_2k_0\bar{Q}_{10}}{A(p)}. \qquad (38)$$

Найдем коэффициент динамичности реакций связи $N(\omega)$:

$$N(\omega)\Big|_{\substack{\bar{z}_1=0\\ \bar{z}_2=0\\ \bar{Q}_2=0}} = \frac{\bar{R}_{A_5\text{полн}}}{\bar{R}_{A\text{полн}}} =$$

$$= \frac{A(p)g[k_2(k_1+k_0)m_2 + k_0k_2m_1] \pm \pm k_2k_0\bar{Q}_{10}A_1}{A(p)g[k_1(k_2+k_0)m_1 + k_0k_1m_2] \pm \pm k_1(m_2p^2+k_2+k_0)\bar{Q}_{10}A_1}. \qquad (39)$$

Дальнейший шаг заключается в том, чтобы осуществить переход к $k_0 \to \infty$, то есть две части m_1 и m_2 соединяются в одну массу m

$$N(\omega)_{k_0\to\infty} = \frac{k_2 m p^2 + k_2(k_1+k_2)\left(1 \pm \frac{\bar{Q}_{10}}{mg}\right)}{k_1 m p^2 + k_1(k_1+k_2)\left(1 \pm \frac{\bar{Q}_{10}}{mg}\right)}. \quad (40)$$

4. Рассматривается случай возмущения $\bar{Q}_2 \neq 0$ при $\bar{Q}_1 = 0$, $\bar{z}_1 = 0$, $\bar{z}_2 = 0$. Определим динамические реакции связей с учетом особенностей действия $\bar{Q}_2 \neq 0$

$$\bar{R}'_{A\text{дин}\ \substack{\bar{z}_1=0\\ \bar{z}_2=0\\ \bar{Q}_1=0}} = \frac{k_1 k_0}{A(p)} \bar{Q}_{20}, \quad (41)$$

$$\bar{R}'_{A_5\text{дин}\ \substack{\bar{z}_1=0\\ \bar{z}_2=0\\ \bar{Q}_1=0}} = \frac{k_2(m_1 p^2 + k_1 + k_0)}{A(p)} \bar{Q}_{20}. \quad (42)$$

Полная реакция связи в точках (A) и (A_5) составит:

$$\bar{R}'_{A\text{полн}} = \frac{g[k_1(k_2+k_0)m_1 + k_0 k_1 m_2]}{A_1} \pm \frac{k_1 k_0 \bar{Q}_{20}}{A(p)}, \quad (43)$$

$$\bar{R}'_{A_5\text{полн}} = \frac{g[k_2(k_1+k_0)m_2 + k_0 k_2 m_1]}{A_1} \pm$$
$$\pm \frac{k_2(m_1 p^2 + k_1 + k_0)\bar{Q}_{20}}{A(p)}. \quad (44)$$

Найдем коэффициент динамичности реакций связей при $\bar{Q}_2 \neq 0$

$$N'(\omega)_{\substack{\bar{z}_1=0\\ \bar{z}_2=0\\ \bar{Q}_1=0}} = \frac{\bar{R}'_{A_5\text{полн}}}{\bar{R}'_{A\text{полн}}} =$$
$$= \frac{A(p)g[k_2(k_1+k_0)m_2 + k_0 k_2 m_1] \pm \pm k_2(m_1 p^2 + k_1 + k_0)\bar{Q}_{20} A_1}{A(p)g[k_1(k_2+k_0)m_1 + k_0 k_1 m_2] \pm \pm k_1 k_0 \bar{Q}_{20} A_1}. \quad (45)$$

Если $k_0 \to \infty$, то

$$N'(\omega)_{k_0\to\infty} = \frac{k_2 m p^2 + k_2(k_1+k_2)\left(1 \pm \frac{\bar{Q}_{20}}{mg}\right)}{k_1 m p^2 + k_1(k_1+k_2)\left(1 \pm \frac{\bar{Q}_{20}}{mg}\right)}. \quad (46)$$

5. Для случая силовых возмущений $\bar{Q}_1 \neq 0$, $\bar{Q}_2 \neq 0$, запишем передаточные функции системы, полагая при $\bar{z}_1 = 0$, $\bar{z}_2 = 0$. Полагаем, что между внешними силовыми факторами Q_1 и Q_2 существует связь, определяемая соотношением

$$\bar{Q}_2 = \beta \cdot \bar{Q}_1, \quad (47)$$

где β – коэффициент связности внешних силовых воздействий.

В этом случае:

$$W_1^{IV}(p)_{\substack{\bar{z}_1=0\\ \bar{z}_2=0}} = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} = \frac{m_2 p^2 + k_2 + k_0 + \beta k_0}{A(p)}, \quad (48)$$

$$W_2^{IV}(p)_{\substack{\bar{z}_1=0\\ \bar{z}_2=0}} = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1} = \frac{k_0 + \beta(m_1 p^2 + k_1 + k_0)}{A(p)}. \quad (49)$$

Динамические реакции связей в тт. (A) и (A_5) определяются выражениями

$$\bar{R}''_{A\text{дин}\ \substack{\bar{z}_1=0\\ \bar{z}_2=0}} = \frac{k_1(m_2 p^2 + k_2 + k_0 + \beta k_0)\bar{Q}_{10}}{A(p)}, \quad (50)$$

$$\bar{R}''_{A_5\text{дин}\ \substack{\bar{z}_1=0\\ \bar{z}_2=0}} = \frac{k_2[k_0 + \beta(m_1 p^2 + k_1 + k_0)]\bar{Q}_{10}}{A(p)}. \quad (51)$$

Перейдем к коэффициенту динамичности реакций связей

$$N''(\omega)_{\substack{\bar{z}_1=0\\ \bar{z}_2=0}} = \frac{\bar{R}''_{A_5\text{полн}}}{\bar{R}''_{A\text{полн}}} =$$
$$= \frac{A(p)g[k_2(k_1+k_0)m_2 + k_0 k_2 m_1] \pm \pm k_2[k_0 + \beta(m_1 p^2 + k_1 + k_0)]\bar{Q}_{10} A_1}{A(p)g[k_1(k_2+k_0)m_1 + k_0 k_1 m_2] \pm \pm k_1(m_2 p^2 + k_2 + k_0 + \beta k_0)\bar{Q}_{10} A_1}. \quad (52)$$

Если $k_0 \to \infty$, то

$$N''_{k_0\to\infty}(\omega) = \frac{k_2mp^2 + k_2(k_1+k_2)\left(1 \pm \dfrac{(1+\beta)\bar{Q}_{10}}{mg}\right)}{k_1mp^2 + k_1(k_1+k_2)\left(1 \pm \dfrac{(1+\beta)\bar{Q}_{10}}{mg}\right)}. \quad (53)$$

Отметим, что выражение (53), так же, как в выражении (46), в полиномах числителя и знаменателя знаки сложения двух составных частей приводятся так, чтобы в числителе и знаменателе знаки были различными. В физическом смысле это означает, что частоты критических ситуаций в системе с двумя степенями свободы могут быть найдены из условия «обнуления» полных реакций динамических связей в характерных точках (A) и (A_5).

Заключение

В механических колебательных системах с сосредоточенными параметрами соединение составляющих элементов (упругие и инерционные элементы, а также диссипативные звенья и устройства для преобразования движения) происходит в так называемых характерных точках.

Нормальная работа соединения в условиях вибрационных возмущений, сопровождается возникновением соответствующих реакций связей. Если такие связи являются неудерживающими, то возможны разъединения контактов, что нежелательно с точки зрения обеспечения надежности и безопасности эксплуатации систем.

1. Предлагается метод построения математических моделей формирования динамических реакций в соединениях элементов систем, в том числе и для контактов с неудерживающими связями.

2. Показаны возможности использования структурных математических моделей в виде структурных схем эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления.

3. Реакции связей определяются на основе применения передаточных функций систем. Предложены технологии определения статических, динамических и полных реакций связей.

4. Для оценки возможностей нарушения контактов в системах с неудерживающими связями получены аналитические соотношения для определения частот нарушения связей. Общий подход связан с представлениями об «обнулении» полной реакции связи как предельного случая.

5. В статье предлагаются алгоритмы проведения соответствующих оценок на основе вводимого понятия о коэффициенте динамичности реакций связей, учитывающем особенности нарушения упругих элементов.

Список литературы

1. Clarence W., De Silva Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. 957 p.

2. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of vibration protection. Switzerland: Springer, 2016. 708 p.

3. Елисеев С.В., Артюнин А.И. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем. Новосибирск: Наука, 2016. 459 с.

4. Моделирование прочности и разрушения несущих конструкций технических систем / С.В. Доронин, А.М. Лепехин, В.В. Москвичев, Ю.И. Шокин. Новосибирск: Наука, 2005. 250 с.

5. Коловский М.З. Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 320 с.

6. Елисеев А.В., Сельвинский В.В., Елисеев С.В. Динамика вибрационных взаимодействий элементов технологических систем с учетом неудерживающих связей. Новосибирск: Наука, 2015. 332 с.

7. Кашуба В.Б., Елисеев С.В., Большаков Р.С .Динамические реакции в соединениях элементов механических колебательных систем. Новосибирск: Наука, 2017. 331 с.

Поступила в редакцию 10.08.18

UDC 629.4.015, 621.534, 62.752

S.V. Eliseev, Doctor of Engineering Sciences, Professor, Irkutsk State Transport University (Russia, 664074, Irkutsk, Chernyshevskogo Str., 15) (e-mail: eliseev_s@inbox.ru)

A.S. Mironov, Applicant, Irkutsk State Transport University (Russia, 664074, Irkutsk, Chernyshevskogo Str., 15) (e-mail: art.s.mironov@mail.ru)

Quang Truc Vuong, Post-Graduate Student, Irkutsk State Transport University (Russia, 664074, Irkutsk, Chernyshevskogo Str., 15) (e-mail: trucvq1990@gmail.com)

THE PECULIARITIES OF THE FORMATION OF CONTACT INTERACTIONS IN A COMPOSITE SOLID UNDER FORCED OSCILLATIONS

The concept of rating dynamic states is proposed in mechanical oscillatory systems created by the interactions of articulated elements. It is assumed that in real constructive solutions elastic, dissipative and mass-inertial elements are not always connected by kinematic pairs providing retaining or two-sided ties. Such situations are typical for many transport and technological vibration machines. The purpose of the article is to develop and detail a method for constructing mathematical models of the interaction of typical elements (or links) of mechanical oscillatory systems in order to determine the resulting coupling reactions in dynamic compounds. Methods of achieving the goal are based on the use of technology and methods of structural mathematical modeling, when the equivalent automatic control system is compared in a dynamic relation. A technology has been developed for the transformation of structural models, which allows for characteristic contact points to form dynamic coupling reactions, as the product of the system's dynamic stiffness at a certain point and its dynamic displacement. The concepts of transfer functions of systems are used. It is shown that dynamic reactions at certain points of the system are fractional rational expressions, the values of which can vary widely depending on the frequencies of the external disturbance. Zero values of the coupling reactions determine the regimes in which the "rupture" of the kinematic coupling is possible. In the presence or accounting of standing forces, the limiting state is reached under conditions that take into account the effect of an additional force factor. The authors propose the introduction of the concept of the relationship of dynamic reactions at various points in the system, which forms certain information spaces. Methods and techniques for estimating dynamic states in compounds of system elements in problems of estimating a possible spectrum of expected dynamic states are proposed.

Key words: *non-retentive ties; transfer functions of system; structural diagrams; dynamic reactions of ties; transmission coefficient of dynamic ties.*

DOI: 10.21869/2223-1560-2018-22-5-14-23

For citation: Eliseev S.V., Mironov A.S., Quang Truc Vuong. The Peculiarities of the Formation of Contact Interactions in a Composite Solid under Forced Oscillations. Proceedings of the Southwest State University, 2018, vol. 22, no. 5(80), pp. 14-23 (in Russ.).

***

Reference

1. Clarence W. De Silva Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000, 957 p.

2. Karnovsky I.A., Lebed E.Theory of vibration protection. Switzerland, Springer Publ., 2016, 708 p.

3. Eliseev S.V., Artjunin A.I. Prikladnaja teorija kolebanij v zadachah dinamiki linejnyh mehanicheskih sistem. Novosibirsk, Nauka Publ., 2016, 459 p.

4. Doronin S.V., Lupehin A.M., Moskvichev V.V., Shokin Ju.I. Modelirovanie prochnosti i razrushenija nesushhih konstrukcij tehnicheskih sistem. Novosibirsk, Nauka Publ., 2005, 250 p.

5. Kolovskij M.Z. Avtomaticheskoe upravlenie vibrozashhitnymi sistemami. Moscow, Nauka Publ., 1976, 320 p.

6. Eliseev A.V., Sel'vinskij V.V., Eliseev S.V. Dinamika vibracionnyh vzaimodejstvij jelementov tehnologicheskih sistem s uchetom neuderzhivajushhih svjazej. Novosibirsk, Nauka Publ., 2015, 332 p.

7. Kashuba V.B., Eliseev S.V., Bol'shakov R.S. Dinamicheskie reakcii v soedinenijah jelementov mehanicheskih kolebatel'nyh sistem. Novosibirsk, Nauka Publ., 2017, 331 p.