УДК 624.04

А.В. Коробко, д-р техн. наук, профессор, ФГБОУ ВО ОГУ им. И.С. Тургенева (Орел, Россия)
(e-mail: sapr@ostu.ru)

Ю.Е. Балихина, аспирант, ФГБОУ ВО ОГУ им. И.С. Тургенева (Орел, Россия)
(e-mail: jbalikhina@gmail.com)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИВЕДЕННОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЖЕСТКОСТИ КРУЧЕНИЯ ДЛЯ СЕЧЕНИЙ В ФОРМЕ ФИГУР, ПРОМЕЖУТОЧНЫХ МЕЖДУ КРУГОМ И ПРАВИЛЬНЫМ МНОГОУГОЛЬНИКОМ

Проблема расчета упругих стержней на кручение является одной из наиболее важных современных проблем в области строительной механики. Многие строительные и машиностроительные конструкции в виде стержневых систем испытывают деформации кручения. При расчете таких конструкций в первую очередь определяется геометрическая жесткость их сечений. Этот физический параметр используется при оценке напряженно-деформированного состояния элементов конструкций, работающих на кручение. В строительной механике и теории упругости известно лишь несколько решений по определению геометрической жесткости сечений в виде эллипса, прямоугольника, равнобедренного треугольника. При более сложных сечениях используются приближенные методы расчета, в основном численные.

В последние два десятилетия при исследовании и решении двумерных задач теории упругости и технической теории пластинок активно развивается и используется геометрический метод – метод интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ), в основе которого лежит изопериметрические свойства интегральной геометрической характеристики формы области (пластинки, мембраны, сечения). Этот метод применим к решению задач упругого кручения стержней, однако до настоящего времени он не получил достойного развития. В настоящей статье с помощью МИКФ решается задача по определению приведенной геометрической жесткости сечений для стержней с сечениями в виде фигур, промежуточных между кругом и правильными многоугольниками. Круглое сечение и сечения в виде правильного многоугольника используются в качестве «опорных» сечений с известными значениями приведенной геометрической жесткости. Подмножество сечений между кругом и правильным многоугольником получается путем последовательного синхронного отсечения от круга его частей прямыми, параллельными сторонам правильного многоугольника. Интерполяция «опорных» решений для любых сечений из рассматриваемого подмножества осуществляется по коэффициенту формы. Построены простые интерполяционные функции, позволяющие по элементарным формулам найти искомое решение для рассматриваемого подмножества форм сечений с использованием единственного аргумента – коэффициента формы.

Приведенное в статье графическое изображение зависимостей «приведенная геометрическая жесткость – коэффициент формы» позволяет наглядно представить место искомого решения в рассматриваемом подмножестве форм сечений.

Ключевые слова: *приведенная геометрическая жесткость сечений, деформации кручения, коэффициент формы, изопериметрические свойства.*

DOI: 10.21869/2223-1560-2017-21-4-6-12

Ссылка для цитирования: Коробко А.В., Балихина Ю.Е. Определение приведенной геометрической жесткости кручения для сечений в форме фигур, промежуточных между кругом и правильным многоугольником // Известия Юго-Западного государственного университета. 2017. Т. 21, № 4(73). С. 6-12.

***

Стержни, воспринимающие деформации кручения, широко распространены в строительстве и машиностроении, в частности в авиа- и судостроении [1, …, 4]. Определение геометрической жесткости кручения сечений является одной из важнейших проблем строительной механики. Для стержней сложных форм и сложными граничными условиями используются в основном приближенные методы решения (вариационные и численные). При использовании численных методов часто теряется физическая сущность задачи из-за затруднений в обобщении и распространении полученных результатов на множество конструкций определенного вида. Приближенные геометрические методы решения этой динамической задачи позволяют избежать указанного недостатка.

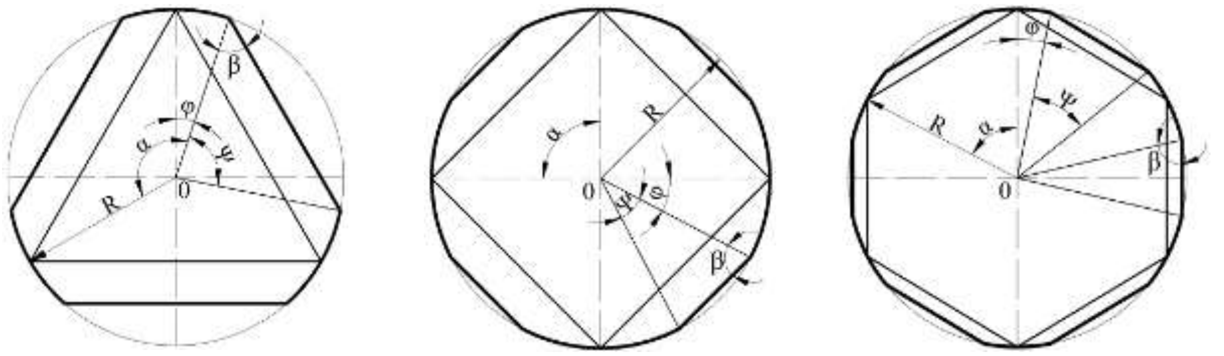


Рис. 1. Способы получение фигур, промежуточных между кругом и правильным многоугольником

В настоящей статье будут рассмотрены стержни, форма которых является промежуточной между кругом и правильными многоугольниками (рис. 1). Такие фигуры могут получаться путем последовательного отсечения от круга его частей прямыми, параллельными сторонам правильного многоугольника, вписанного в заданный круг, и отстоящими от центра на одинаковом расстоянии.

При исследовании напряженно-деформированного состояния стержня, испытывающего деформации кручения, в первую очередь нужно определить геометрическую жесткость кручения $I_к$.

Среди известных геометрических методов решения двумерных задач наиболее распространенным является эффективный инженерный метод – метод интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ). В его основе лежат изопериметрические свойства интегральной геометрической характеристики области с выпуклым контуром – коэффициента формы. Подробные сведения о ней и методика решения задач технической теории пластинок, а также задачи теории кручения упругих призматических стержней с помощью МИКФ приведены в монографии [5]. Развитием этого метода активно занимаются ученые, аспиранты и магистры Орловского госуниверситета имени И.С. Тургенева [6–11]. К задачам кручения упругих стержней геометрический метод с использованием свойств коэффициента формы был впервые применен В.И. Коробко [6].

Для стержней, рассматриваемых в настоящей статье, коэффициент формы определяется по формуле [5]

$$K_f = 2n\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\varphi}{2}\right). \qquad (1)$$

Здесь n – количество сторон многоугольника, а остальные обозначения указаны на рисунке 1.

В данной работе задача об определении $I_к$ для любого поперечного сечения представлена соотношением

$$I_k \geq K_I A^2 / K_f, \qquad (2)$$

где K_I – коэффициент пропорциональности, который будет разным для различных характерных подмножеств форм сечений (треугольные, прямоугольные, трапециевидные и т.п.), или для некоторого подмножества форм сечений, объединенных одним непрерывным или дискретным геометрическим преобразованием; A – площадь пластинки. В монографии [5] показано, что для различных характерных подмножеств форм сечений целесообразно использовать зависимости:

$$I_k \geq K_I A^2 / K_f^n$$

или $I_k \geq A^2 \left(K_I + B / K_f \right)$, (3)

где имеется два неизвестных параметра. Если рассматривается некоторое подмножество сечений, объединенных одним непрерывным или дискретным геометрическим преобразованием, в котором имеются два сечения с известными решениями, то тогда неизвестные параметры в выражении (3) могут быть найдены.

В дальнейшем целесообразней определять приведенную геометрическую жесткость сечения $i_k = I_k / A^2$:

$$i_k \geq K_I / K_f^n$$

или $i_k \geq K_I + B / K_f$. (4)

Поскольку коэффициент формы обладает изопериметрическими свойствами, то такими же свойствами будет обладать и приведенная геометрическая жесткость кручения $i_к$. Известные результаты, включенные в таблицу 1, заимствованы из работ [2, 3, 5] и справочников [1, 4]. Использование неравенства (2) дает погрешность до 17%. При аппроксимации известных решений с использованием аргумента $К_f$ получаем зависимость

$$i_к = 0,03114 + \frac{2,0254}{K_f} \frac{5,2117}{K_f^2}, \quad (5)$$

которая удовлетворяет табличным данным для сечений в виде правильных фигур с погрешностью 1%.

При определении геометрической жесткости кручения сечений стержней, получаемых при помощи преобразований, указанных на рисунке 1, зависимость (5) может использоваться для получения «опорных» решений.

Таблица 1

Результаты расчета стержней по приближенным аналитическим зависимостям

Параметры сечения	Сечения в виде правильных многоугольников				
	3	4	6	8	круг
1	2	3	4	5	6
$\alpha/2$, град	60	45	30	22,5	0
$\varphi/2$, рад	1,0472	0,7854	0,5236	0,3927	0
$К_f$	10,3923	8,0000	6,9282	6,6274	2π
[$i_к$]	0,1155	0,1406	0,1533	0,1574	0,1592
$К_f^{-1}$	0,0962	0,125	0,1443	0,1509	0,1592
Δ,%	16,71	11,10	5,87	4,13	0
$i_к$ по (5)	0,1155	0,1406	0,1526	0,1558	0,1592
Δ,%	0	0	0,47	1,02	0

Воспользовавшись второй формулой из (3) получим следующие решения для сечений, промежуточных между правильными многоугольниками и кругом:

– при преобразовании сечения в виде правильного треугольника в круглый

$$i_k = 0,3272 \left(K_f \right)^{-1,616};$$

(6)

– при преобразовании сечения в виде квадрата в круглое

$$i_k = 0{,}1661\left(К_f\right)^{-1{,}98}; \qquad (7)$$

– при преобразовании сечения в виде правильного шестиугольника в круглое

$$i_k = 0{,}0880\left(К_f\right)^{-2{,}323}; \qquad (8)$$

– при преобразовании сечения в виде правильного восьмиугольника в круглое

$$i_k = 0{,}0660\left(К_f\right)^{-2{,}479}. \qquad (9)$$

Результаты расчета таких стержней представлены в таблице 2.

Таблица 2

Значения $К_f$ и приведенной геометрической жесткости сечения для стержней, промежуточных между кругом и в виде правильного многоугольника

$\varphi/2$	Сечения в форме правильных фигур			
	3	4	6	8
0	6,28318 0,1592	6,28318 0,1592	6,28318 0,1592	6,28318 0,1592
5	6,28452 0,1592	6,28496 0,1592	6,28585 0,1592	6,28674 0,1592
10	6,29395 0,1591	6,29754 0,1591	6,30471 0,1590	6,31189 0,1589
15	6,32008 0,1589	6,33238 0,1587	6,35698 0,1585	6,38158 0,1583
20	6,37261 0,1584	6,40242 0,1581	6,46204 0,1575	6,52166 0,1569
22,5	–	–	–	**6,62742** **0,1558**
25	6,46304 0,1575	6,52299 0,1569	6,64289 0,1557	–
30	6,60569 0,1560	6,71320 0,1549	**6,92820** **0,1526**	–
35	6,81924 0,1538	6,99792 0,1519	–	–
40	7,12900 0,1504	7,41093 0,1473	–	–
45	7,57080 0,1455	**8,00000** **0,1406**	–	–
50	8,19772 0,1384	–	–	–
55	9,08248 0,1287	–	–	–
60	**10,3923** **0,1155**	–	–	–

Примечания:

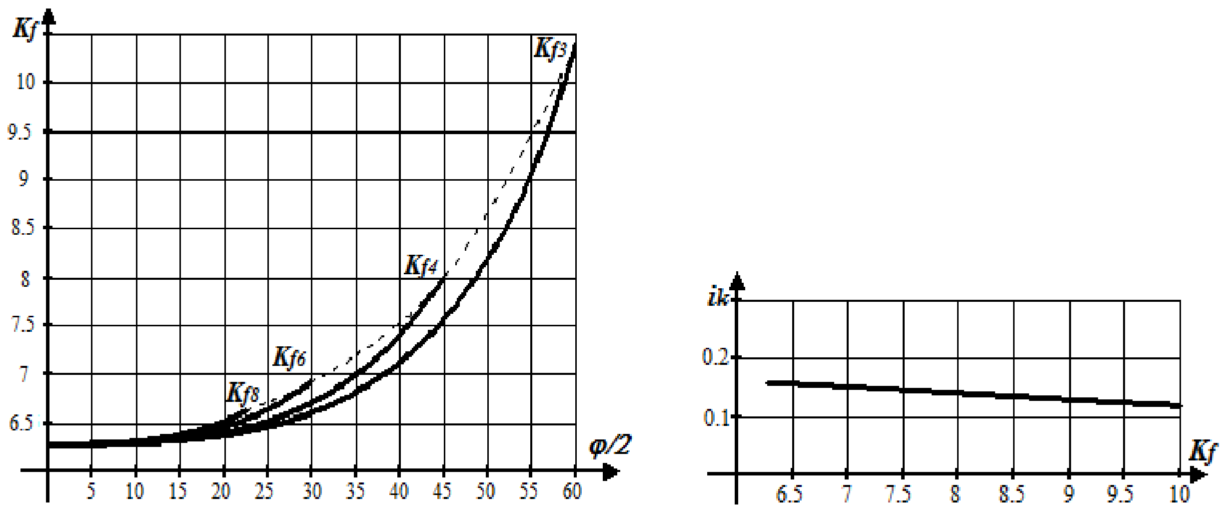
В верхней части ячейки приведены значения $К_f$, в нижней части – значения основных геометрических жесткостей сечений.

2 *Жирным шрифтом выделены значения $К_f$ и геометрической жесткостей сечения для стержней в виде правильных фигур.*

Графически данные таблиц 1 и 2 изображены на рисунке 2, где в первом случае по оси абсцисс откладываются значения угла φ/2, а по оси ординат – значения коэффициента формы, а во втором случае по оси абсцисс откладываются значения коэффициента формы стержней, а по оси ординат – значения приведенных геометрических жесткостей сечений. Цифровые индексы 3, 4, 6, 8 при K_f на графике относятся к стержням в виде правильных многоугольников.

Анализ графиков на рисунке 2 позволяет сделать следующие выводы:

1. С учетом изопериметрических свойств коэффициента формы [5] пунктирная кривая на рисунке 2-а является верхней границей для всего подмножества рассматриваемых сечений частотного параметра.



а) б)

Рис. 2. Зависимости K_f - φ/2 и i_k - K_f: а – графические данные таблицы 1; б – графические данные таблицы 2

2. Все искомые значения приведенной геометрической жесткости рассматриваемых сечений описываются одной зависимостью (5) в диапазоне $2\pi \le K_f \le 10{,}3923$, где единственным аргументом является коэффициент формы. Зависимости (6), …, (9) дают решения с несколько большей точностью.

3. Построенные интерполяционные полиномы позволяют по элементарным формулам находить значения приведенной геометрической жесткости рассматриваемых сечений.

4. Графическое изображение зависимостей i_k - K_f позволяет наглядно представить место искомого решения в рассматриваемом подмножестве форм сечений.

Список литературы

1. Прочность, устойчивость, колебания: справочник: в 3 т. / под общей редакцией И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 832 с.

2. Суслов В.П., Качанов Ю.П., Спихтаренко В.Н. Строительная механика корабля и основы теории упругости. Л.: Судостроение, 1972. 720 с.

3. Феофанов А.В. Строительная механика авиационных конструкций. М.: Машиностроение, 1964. 136 с.

4. Справочник по теории упругости. Киев: Изд-во «Будівельник», 1974. 419 с.

5. Коробко А.В. Геометрическое моделирование формы области в двумерных задачах теории упругости. М.: Изд-во АСВ, 1999. 302 с.

6. Коробко В.И. Графическое представление границ изменения геометрической жесткости сечений в виде выпуклых фигур при кручении // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 1986. № 3. С. 3-7.

7. Коробко В.И., Коробко А.В. Строительная механика пластинок. М.: Издательский дом «Спектр», 2010. 410 с.

8. Савин С.Ю., Коробко В.И. Расчет ортотропных пластин в виде правильных многоугольников с однородными граничными условиями // Строительство и реконструкция. 2011. № 1. С. 3-11.

9. Савин С.Ю., Коробко В.И. Изгиб ортотропных пластинок в виде параллелограмма с однородными и комбинированными граничными условиями // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 2. С. 18-23.

10. Черняев А.А., Коробко В.И. Определение максимального прогиба ромбических пластинок с комбинированными граничными условиями с использованием отношения конформных радиусов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2011. № 4. С. 21-25.

11. Черняев А.А. К вопросу расчета пластинок средней толщины из условий жесткости // Региональная архитектура и строительство. 2012. № 1. С. 83-89.

Поступила в редакцию 17.05.17

UDC 624.04

A.V. Korobko, Doctor of Engineering Sciences, Professor, OSU named after I.S. Turgenev (Orel, Russia) (e-mail: sapr@ostu.ru)

Yu. Ye. Balikhina, Postgraduate Student, OSU named after I.S. Turgenev (Orel, Russia) (e-mail: jbalikhina@gmail.com)

ESTIMATION OF THE UNIT TORSIONAL RIGIDITY OF A CROSS-SECTION WITH A HYBRID DISK-EQUILATERAL POLYGON SHAPE

Elastic rod torsion analysis is one of the most important problems in modern structural mechanics. Many building and machine-building structures undergo torsion deformations. In order to design such structure it is necessary to find its cross-section geometrical rigidity. This physical parameter is used to assess the stress-strain behavior of the structural elements that are in torsion. Structural mechanics and elasticity theory have just a few solutions to find the geometrical rigidity of cross-sections shaped as an oval, a rectangle and an isosceles triangle. In case of more complex cross-section shapes only approximate solutions are used, basically numerical ones.

During the last two decades two-dimensional problems in the elasticity theory and technical theory of slices have been solved by means of geometrical method or shape factor interpolation method (SFIM) which is based on isoperimetric properties of the integral geometric characteristic of the shape area (a plate, disk or cross-section). This method can be applied to solve the problems of rod elastic torsion; however, it has not been widely used so far. This paper disrobes the use of SFIM method to calculate the unit cross-section geometrical rigidity of the rods with a hybrid disk-equilateral polygon cross-section shape. Circular and equilateral polygon shaped cross-sections are used as "basis" cross-sections with known unit geometrical rigidity values. The subset of all cross-sections lying in the range between circular and equilateral polygon cross-sections is found by subsequently and synchronously cutting the parts of the circle off by straight lines that are parallel to the sides of the equilateral polygon. Interpolation of reference solutions for any cross-section taken from the cross-section subset is done by the shape factor. Plain interpolation functions have been built, which makes it possible to find the solution for the analyzed subset of cross-section shapes by prime formulas applying the only argument, which is the shape factor.

The paper contains the dependency graph "unit geometrical rigidity-shape factor" to illustrate the place of the desired solution in the subset of cross-section shapes.

Key words: *unit geometrical rigidity of ca cross-section, torsion deformation, shape factor, isoperimetric properties.*

DOI: 10.21869/2223-1560-2017-21-4-6-12

For citation: Korobko A.V., Balikhina Yu. Ye. Estimation of the Unit Torsional Rigidity of a Cross-Section with a Hybrid Disk-Equilateral Polygon Shape. Proceedings of the Southwest State University, 2017, vol. 21, no 4(73), pp. 6-12 (in Russ.).

***

Reference

1. Prochnost', ustojchivost', kolebanija: spravochnik: v 3 t. / pod obshhej redakciej I.A. Birgera i Ja.G. Panovko. M.: Mashinostroenie, 1968, 832 p.

2. Suslov V.P., Kachanov Ju.P., Spihtarenko V.N. Stroitel'naja mehanika korablja i osnovy teorii uprugosti. L.: Sudostroenie, 1972, 720 p.

3. Feofanov A.V. Stroitel'naja mehanika aviacionnyh konstrukcij. M.: Mashinostroenie, 1964, 136 p.

4. Spravochnik po teorii uprugosti. Kiev: Izd-vo «Budivel'nik», 1974, 419 p.

5. Korobko A.V. Geometricheskoe modelirovanie formy oblasti v dvumernyh zadachah teorii uprugosti. M.: Izd-vo ASV, 1999, 302 p.

6. Korobko V.I. Graficheskoe predstavlenie granic izmenenija geometricheskoj zhestkosti sechenij v vide vypuklyh figur pri kruchenii. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Mashinostroenie, 1986, no. 3, pp. 3-7.

7. Korobko V.I., Korobko A.V. Stroitel'naja mehanika plastinok. M.: Izdatel'skij dom «Spektr», 2010, 410 p.

8. Savin S.Ju., Korobko V.I. Raschet ortotropnyh plastin v vide pravil'nyh mnogougol'nikov s odnorodnymi granichnymi uslovijami. Stroitel'stvo i rekonstrukcija, 2011, no. 1, pp. 3-11.

9. Savin S.Ju., Korobko V.I. Izgib ortotropnyh plastinok v vide parallelogramma s odnorodnymi i kombinirovannymi granichnymi uslovijami. Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij, 2012, no. 2, pp. 18-23.

10. Chernjaev A.A., Korobko V.I. Opredelenie maksimal'nogo progiba rombicheskih plastinok s kombinirovannymi granichnymi uslovijami s ispol'zovaniem otnoshenija konformnyh radiusov. Stroitel'naja mehanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij, 2011, no. 4, pp. 21-25.

11. Chernjaev A.A. K voprosu rascheta plastinok srednej tolshhiny iz uslovij zhestkosti. Regional'naja arhitektura i stroitel'stvo, 2012, no. 1, pp. 83-89.