

УДК 691.328-413

И.Н. Серпик, д-р техн. наук, профессор, ФГБОУ ВО «Брянский государственный инженерно-технологический университет» (Брянск, Россия) (e-mail: inserpik@gmail.com)

К.В. Муймаров, аспирант, ФГБОУ ВО «Брянский государственный инженерно-технологический университет» (Брянск, Россия) (e-mail: kirillmkw@mail.ru)

С.Н. Швачко, канд. техн. наук, доцент, ФГБОУ ВО «Брянский государственный инженерно-технологический университет» (Брянск, Россия) (e-mail: sshvachko@mail.ru)

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ С ОДНОСТОРОННИМИ ОПОРНЫМИ СВЯЗЯМИ

Разработана вычислительная схема для расчета железобетонных плит методом конечных элементов при возможности учета односторонних связей. Напряженно-деформированное состояние плиты моделируется, принимая во внимание физически нелинейное поведение бетона и арматуры, дискретность армирования, образование поперечных трещин в бетоне. Для плиты в целом принимаются справедливыми гипотезы Кирхгоффа. Считается, что вне трещин арматура имеет идеальное сцепление с бетоном. Бетон представляется системой тонких слоев, каждый из которых находится в условиях плоского напряженного состояния. Аппроксимация перемещений в этой многослойной схеме выполняется с использованием треугольных пластинчатых конечных элементов. Деформация арматуры описывается с помощью стержней, работающих только на растяжение или сжатие. Односторонние связи представляются контактными конечными элементами. Прочность бетона оценивается согласно критерию Н.И. Карпенко. Деформации бетона между трещинами описываются в соответствии с подходом В.И. Мурашева. На основе принципа возможных перемещений формируется система разрешающих уравнений конечно-элементной модели. Предложен вариант использования метода секущих, обеспечивающий сходимость итерационного процесса для комплексной нелинейной задачи такого типа. Предусмотрено на первом этапе выполнять пошаговое нарастание внешних сил до достижения фактического уровня нагружения. В каждом таком шаге реализуется только одна итерация метода секущих. Далее осуществляется итерационное решение задачи при многократном изменении секущих модулей. Работоспособность данного алгоритма подтверждена на основе теоретического анализа и эксперимента для прямоугольной в плане изгибаемой железобетонной плиты, имеющей свободное опирание по трем сторонам и не закрепленной по четвертой стороне. При этом испытывались три образца плиты с контролем образования трещин, измерением деформаций и перемещений.

Ключевые слова: железобетонные плиты, односторонние связи, физическая нелинейность, трещины, метод секущих, эксперимент.

DOI: 10.21869/2223-1560-2017-21-2-99-109

Ссылка для цитирования: Серпик И.Н., Муймаров К.В., Швачко С.Н. Алгоритм расчета и экспериментальное исследование деформаций железобетонных плит с односторонними опорными связями // Известия Юго-Западного государственного университета. 2017. Т. 21, № 2(71). С. 99-109.

Введение

Анализ деформирования железобетонных плит во многих случаях требует учета физически нелинейного поведения бетона и арматуры, возможного образования трещин в бетоне, а также конструктивной нелинейности, обусловленной, прежде всего, свободным опиранием плит во многих строительных системах. Основы

теории нелинейной механики железобетона изложены в работах [2-10, 14, 20], распространенные инженерные подходы к проектированию железобетонных конструкций в нелинейной постановке отражены в нормативных документах [23, 24]. Методологии анализа деформаций конструкций с односторонними связями посвящено большое число работ. В строительной механике для решения таких

задач используется метод квадратичного программирования [1], способ выделения контактной поверхности с кинематическими и силовыми условиями [19], метод контактных элементов [12] и др. Комплексный учет нелинейных эффектов для расчета железобетонных плит обычно реализуется на основе упрощенных подходов, предусматривающих использование для системы бетон-арматура приведенных жесткостных характеристик [21]. В то же время вопрос создания эффективных вычислительных схем для расчета в физически и конструктивно нелинейной постановке железобетонных несущих систем, в том числе с учетом образования трещин в бетоне, при рассмотрении арматуры в дискретной постановке, еще требует выполнения дальнейших исследований.

В настоящей работе предлагается итерационный алгоритм для расчета железобетонных плит в рамках метода конечных элементов и метода секущих с возможностью учета односторонних связей и нелинейного деформирования бетона и арматуры при описании арматуры стержневыми конечными элементами. Выполнена оценка точности разработанной методики путем сопоставления результатов теоретического анализа с данными проведенных экспериментальных исследований.

Алгоритм решения задачи

Моделируем работу железобетона методом конечных элементов, следуя основным положениям работ [16-18, 25]. Полагаем, что нагружение конструкции осуществляется путем пропорционального увеличения всех действующих на нее сил. Считаем, что вне трещин арматура имеет идеальное сцепление с бетоном. Используем описание деформаций бетона при отсутствии трещин и условия пре-

дельных состояний бетона в соответствии с теорией Н.И. Карпенко [6]. Работа бетона между трещинами учитывается с помощью схемы В.И. Мурашева. Считаем справедливыми гипотезы Кирхгоффа для плиты в целом. Бетон представляем системой тонких слоев, каждый из которых находится в условиях плоского напряженного состояния. Реализуем аппроксимацию перемещений в пластинчатых конечных элементах на основе схемы работы [15]. Деформацию арматуры описываем с помощью стержней, работающих только на растяжение или сжатие.

В данной работе наряду с классическими случаями жесткой заделки, шарнирного опирания и свободного края, будем рассматривать возможность односторонних связей. Эти связи описываем с помощью ферменных конечных элементов, имеющих достаточно большую жесткость на сжатие и пренебрежимо малую жесткость на растяжение. На рис. 1,а приведена конечно-элементная схема для участка плиты, где кромка А является свободной, В – свободно опертой с заданием односторонних связей; на рис. 1,б показана диаграмма деформирования условных вертикальных стержней, где L , ΔL – исходная длина стержня и абсолютное ее изменение; N – продольная сила в стержне; α , β – задаваемые малые углы. Задание таких диаграмм позволяет приближенно описывать односторонние связи в рамках физически нелинейной задачи.

Как показывают расчеты, непосредственное использование метода секущих для рассматриваемой в настоящей работе проблемы может приводить к нарушению сходимости итерационного процесса. Введем модификацию процедуры данного метода, полагая, что для первых r_1 итераций осуществляется пошаговое увеличение нагрузки до достижения ее фак-

тического значения. При этом не ставится задача оценки напряженно-деформированного состояния для каждого уровня нагружения, а при $r_1=1$ решается линейная задача с заданием начальных модулей

упругости материала и заменой односторонних связей двухсторонними. Далее реализуется итерационная схема метода секущих.

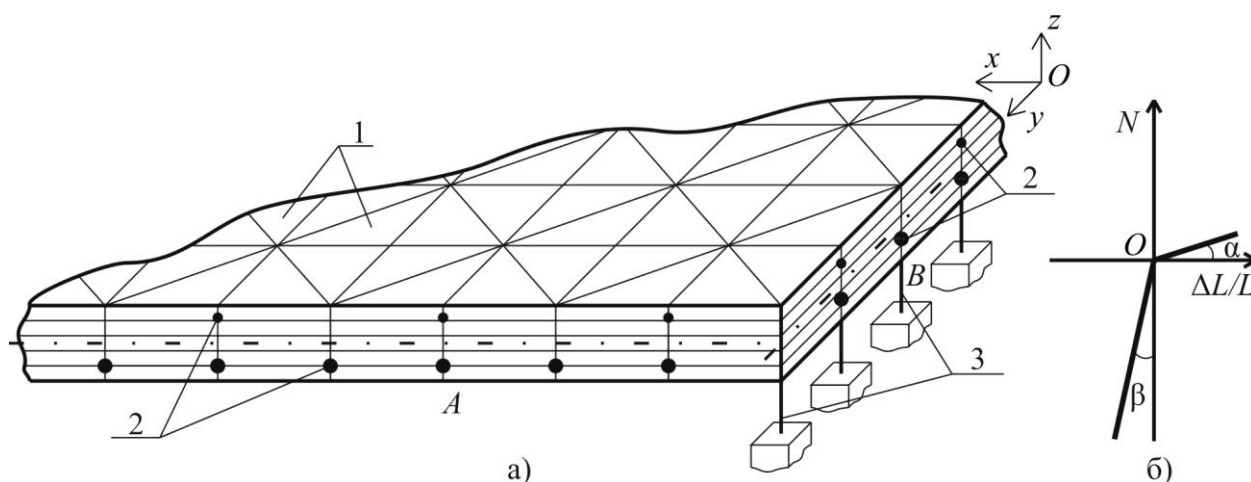


Рис. 1. а – Разбивка участка плиты на конечные элементы; б – диаграмма растяжения-сжатия конечных элементов для условных стержней, описывающих односторонние связи: 1 – слоистые конечные элементы бетона; 2 – конечные элементы арматуры; 3 – опорные конечные элементы

Согласно принципу возможных перемещений, для любой итерации $r > 1$ в данном случае можно записать

$$\sum_{i=1}^{N_b} \delta U_{bi}^{(r)T} K_{bi}^{(r-1)} U_{bi}^{(r)} + \sum_{j=1}^{N_s} \delta U_{sj}^{(r)T} [K_{sj}]^{(r-1)} U_{sj}^{(r)} + \sum_{l=1}^{N_u} \delta w_l^{(r)T} C_l^{(r-1)} w_l^{(r)} - \delta U^{(r)T} Q = 0, (1)$$

где N_b , N_s – число многослойных конечных элементов бетона и стержневых конечных элементов арматуры; δ – обозначение вариации; $U_{bi}^{(r)}$, $U_{sj}^{(r)}$ – векторы обобщенных узловых перемещений итерации r для этих конечных элементов; $K_{bi}^{(r-1)}$, $[K_{sj}]^{(r-1)}$ – секущие матрицы жесткости конечных элементов бетона и арматуры, получаемые на основе выполнения итерации $r-1$; N_u – число уз-

лов для железобетонной плиты; $w_l^{(r)}$ – значение проекции w на ось Oz вектора перемещения для узла l в итерации r ; $C_l^{(r-1)}$ – жесткость опорного конечного элемента в узле l , вычисленная с учетом результатов итерации $r-1$; $U^{(r)}$, Q – векторы обобщенных узловых перемещений для итерации r и приведенной к узлам внешней нагрузки для конечно-элементной модели.

На основе равенства (1) формируется следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$K^{(r-1)} U^{(r)} = P^{(r)}, (2)$$

где $K^{(r-1)}$ – полученная в итерации $r-1$ глобальная секущая матрица жесткости дискретизированного объекта; $P^{(r)}$ – вектор узловых сил, рассматриваемых в итерации r .

При использовании постоянных шагов по нагрузке процесс решения нелинейной задачи можно укрупнено представить в виде, показанном на рисунке 2, где ΔQ – приращение вектора Q ; r_0

– общее число итераций ($r_0 > r_1$). Данная вычислительная схема была реализована в программном комплексе DIVLOC, разработанном на кафедре «Механика» БГИТУ.



Рис. 2. Схема итерационного алгоритма

Пример расчета и экспериментального исследования плиты

Расчетная модель. На основе разработанного алгоритма выполнялся расчет деформаций прямоугольной в плане плиты (рис. 3,а) толщиной 56 мм. Предусматривалось нижнее армирование плиты прямоугольной сеткой из холодноотянутой арматурной проволоки 4 Вр-I по ГОСТ 6727-80 с защитным слоем 8 мм. Рассматривалось свободное опирание плиты по сторонам AF, AC, CD и отсутствие опирания по стороне FD. Принималось, что объект нагружен силами тяжести плиты и направленной вниз (против оси Az) равномерно распределенной по площади силой интенсивностью q на квадратной площадке со стороной 250 мм. Значения q задавались в интервале

[21,6...130,4] кПа с шагом 6,4 кПа. Рассчитывалась половина симметричной конструкции (рис. 3,б).

Строилась конечно-элементная модель с использованием 176 многослойных треугольных в плане конечных элементов бетона, 173 стержневых конечных элементов арматуры и 20 опорных конечных элементов. Выполнялось независимое решение задачи для каждого рассматриваемого значения q с введением $r_1=100$. Плита также рассчитывалась в физически и конструктивно нелинейной постановке в программном комплексе STARK ES 2016 (лицензия № 066048) с введением 384-х многослойных прямоугольных конечных элементов, каждый из которых включал 11 слоев материала «Бетон» и два слоя материала «Арматурный слой».

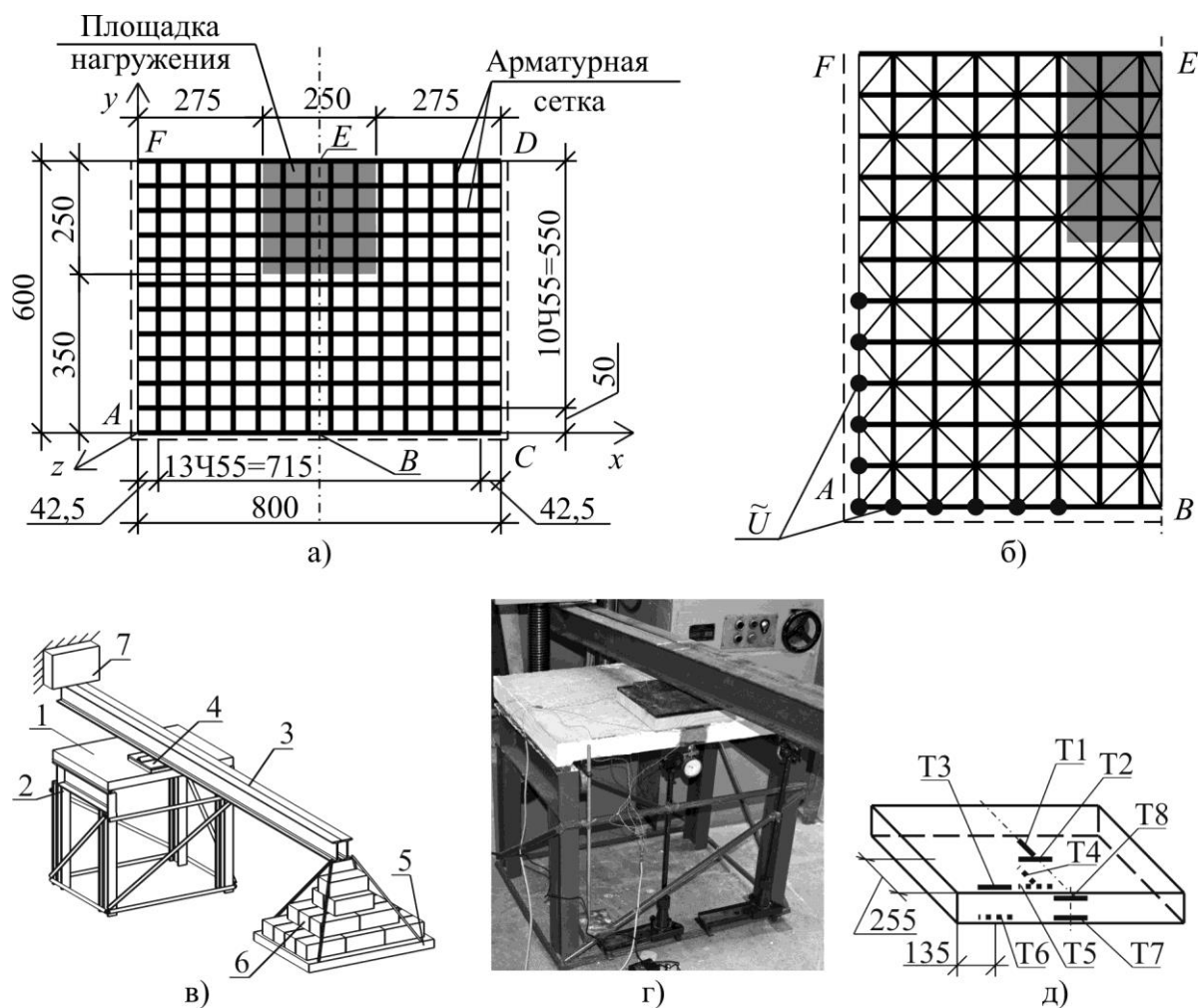


Рис. 3. а – Схема железобетонной плиты; б – система конечных элементов бетона и арматуры; в, г – эскиз и фото экспериментальной установки; д – расположение тензорезисторов: 1 – плита; 2 – опорная рама; 3 – балка-рычаг; 4 – штамп нагружения; 5 – поддон для грузов; 6 – грузы; 7 – опора рычага

Экспериментальная модель

Для проверки точности предлагаемой методики данный объект подвергался экспериментальному исследованию. Были изготовлены три образца плиты. Прочность бетона оценивалась на 28-е сутки естественного твердения неразрушающими методами. Найденные значения прочности указывали на соответствие бетона классу В45. Установленные значения прочности арматуры отличались от справочных нормативных характеристик не более чем на 5%.

В эксперименте условия работы плиты, принятые в расчетной схеме, моделировались на испытательном стенде (рис. 3, в, г). Нагружение осуществлялось с помощью балки-рычага через штамп 250×250 мм. Прогибы плиты определялись индикаторами часового типа. Для образца 1 выполнялись замеры деформаций с использованием тензометрических датчиков Т1-Т8 (рис. 3, д). Применялись константовые фольговые тензорезисторы ВХ120-50АА с измерительной базой 50 мм и сопротивлением $120,0 \pm 2$ Ом, которые крепились к поверхности плиты и компенсационного фрагмента бетона с

помощью однокомпонентного этил-цианокрилатного клея холодного отверждения. Использовался крейт LTR EU-2 с модулями сбора данных тензоизмерений LTR 212 и управляющая программа LGraph2. С частотой 150 Гц фиксировались величины относительных линейных деформаций.

Результаты расчетов и экспериментов

В расчетах учитывались осредненные характеристики материалов, установленные экспериментально. Для обоих используемых программных продуктов результаты удалось получить только при $q \leq 130,4$ кПа. Далее с увеличением нагрузки расчеты прерывались, что можно интерпретировать как возникновение условий разрушения плиты (исчерпания несущей способности). В программном комплексе DIVLOC итерационный процесс для $q \leq 130,4$ кПа практически сходился за 300-500 итераций. При этом узлы \tilde{U} конечно-элементной модели, обозначенные на рис. 3,б жирными точками, имели положительные расчетные перемещения по оси Az, что указывает на отрыв этих узлов от опор. Для остальных узлов на сторонах AB и AF по оси Az получены пренебрежимо малые отрицательные перемещения, соответствующие условию сохранения вертикальных связей. В эксперименте также наблюдалось явление отрыва опорных граней в зонах углов A и C плиты. Расчетные длины участков отрыва плиты при $q \leq 130,4$ кПа отличались от экспериментальных по всем трем образцам не более чем на 19 % на кромке AC и 7 % – на кромках AF и CD. При $q > 53,6$ кПа наблюдалось образование трещин в нижней части плиты.

На рис. 4 сопоставлены расчетные и экспериментальные данные для относительных линейных деформаций ε_5 , ε_7 , ε_8 по тензорезисторам T5, T7, T8, расположенным в наиболее напряженной области плиты, и для прогиба δ_E точки E. Полученные с помощью комплекса DIVLOC значения ε_5 для диапазона нагрузок $21,6 \leq q \leq 124,0$ кПа отличались от экспериментальных не более чем 19 %, ε_7 – не более чем на 20 % (рис 4, а, б). Для деформаций ε_8 (см. рис 4, в) соответствующее различие при $47,2 \leq q \leq 66,4$ кПа составило 12-34 %. Существенное увеличение разницы экспериментальных и расчетных значений для ε_8 с ростом нагрузки можно объяснить влиянием эффекта продавливания на местное напряженно-деформированное состояние в зоне расположения датчика T8. По всем тензорезисторам расчетные величины относительных деформаций, превышающие 4×10^{-5} , расходились с экспериментальными данными до фиксации в плите трещин растяжения не более чем на 23 %.

Найденные в комплексе DIVLOC перемещения δ_E при $21,6 \leq q \leq 111,2$ кПа отличаются от соответствующих результатов комплекса STARK ES на 3,2-16,2%. Для нагрузок $60,0 \leq q \leq 117,6$ кПа максимальное отличие по величине δ_E от среднего экспериментального прогиба для трех образцов в комплексе STARK ES составляет 23 %, а в комплексе DIVLOC – 19 %. При $q = 124,0$ кПа расхождение в результатах двух сопоставляемых методик становится более существенным: 54 % и 24 % соответственно. Для нагрузки $q = 130,4$ кПа прогиб δ_E отличается для

комплекса STARK ES по сравнению со средним экспериментальным на 75 %, для комплекса DIVLOC – на 24 %. То есть в целом для рассматриваемой задачи пред-

лагаемый алгоритм дал возможность существенно повысить точность определения прогибов по сравнению с комплексом STARK ES.

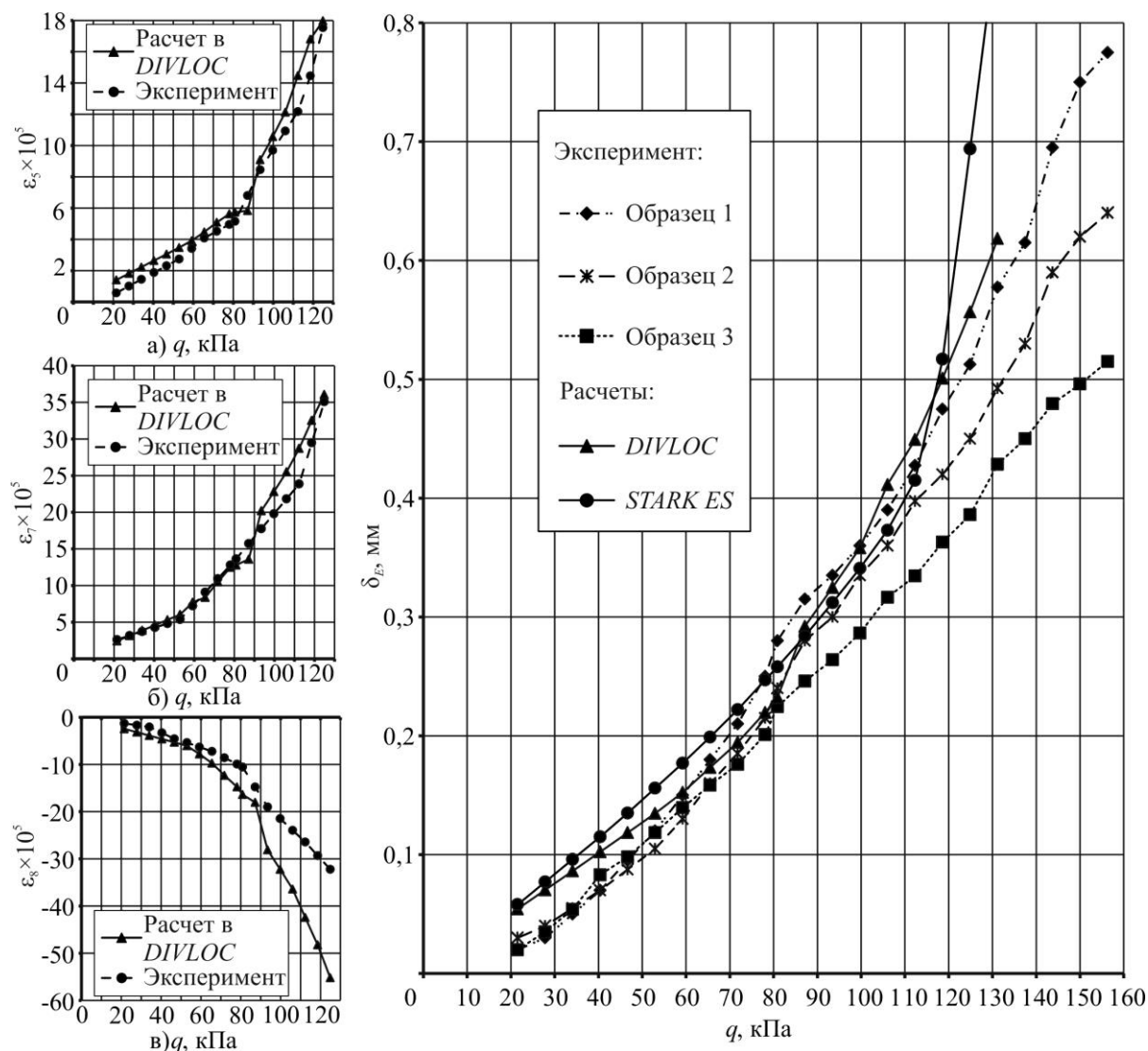


Рис. 4. а, б, в – Относительные линейные деформации для тензорезисторов Т5, Т7, Т8 образца 1; г – прогибы плиты в точке E

Заключение

Разработанный алгоритм конечно-элементного анализа деформирования железобетонных плит обеспечивает возможность учета нелинейного поведения железобетона и односторонних опорных

связей при дискретном представлении арматурных стержней. Использование данной вычислительной схемы может повысить точность описания работы железобетонных систем в практике проектирования строительных объектов.

Список литературы

1. Аверин А.Н., Пузаков А.Ю. Расчет систем с односторонними связями // Строительная механика и конструкции. 2015. № 10. Т. 1. С. 15-32.
2. Бондаренко В.М., Римшин В.И. Квазилинейные уравнения силового сопротивления и диаграмма σ - ε бетона // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. №6. С. 40-44.
3. Бондаренко В.М. К вопросу о концептуальных основах теории железобетона // Бетон и железобетон. 2001. №2. С. 16-18.
4. Воронин З.А. К построению методики расчета железобетонных плит с трещинами на базе слоистой модели МКЭ // Тез. докл. 55-й науч. студен. конф. 2003. С. 100-109.
5. Зырянов В.С. Пространственная работа железобетонных плит, опёртых по контуру. М.: ЦНИИЭП, 2002. 109 с.
6. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. М.: Стройиздат, 1996. 416 с.
7. Карпенко Н.И., Радайкин О.В. К совершенствованию диаграмм деформирования бетона для определения момента трещинообразования и разрушающего момента в изгибаемых железобетонных элементах // Строительство и реконструкция. 2012. Вып. 3. С. 10-15.
8. Ключева Н.В., Горностаев С.И. К вопросу выбора расчетной модели для оценки жесткости железобетонных конструкций // Известия Юго-Западного государственного университета. 2016. № 1(64). С. 71-74.
9. Ключева Н.В., Бухтиярова А.С., Прокопенко В.В. К определению параметра живучести пространственных конструктивных систем смешанным методом // Известия Юго-Западного государственного университета. 2011. № 3(36). С. 146-149.
10. Колчунов В.И., Андросова Н.Б. Критерий прочности плосконапряженного коррозионно повреждаемого элемента и его приложение к расчету железобетонных конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2011. № 1. С. 13-19.
11. Кумпяк О.Г., Галяутдинов З.Р. Экспериментальные исследования опертых по контуру железобетонных плит с распором // Вестник Томск. госуд. арх.-строит. унив. 2015. №3 (50). С. 113-120.
12. Лукашевич А.А., Розин Л.А. О решении контактных задач строительной механики с односторонними связями и трением методом пошагового анализа // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 1 (36). С. 75-81.
13. Осовских Е.В., Колчунов В.И., Афонин П.А. Деформирование, трещинообразование и разрушение эксплуатируемых железобетонных складчатых покрытий в предельных и запредельных состояниях // Строительство и реконструкция. 2013. №1(45). С. 26-32.
14. Палювина С.Н. Совершенствование расчёта прочности и трещиностойкости железобетонных плит на основе численных методов: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01. Белгород, 2000. 28 с.
15. Серпик И.Н. Треугольная дискретизация тонких оболочек на основе модифицированного подхода к кусочному тестированию в методе конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. 2010. № 1. С. 27-33.
16. Серпик И.Н., Муймаров К.В., Швачко С.Н. Анализ деформирования железобетонных плит с учетом дискретности арматуры и физической нелинейности // Научное обозрение. 2014. № 8-1. С. 70-75.

17. Серпик И.Н., Муймаров К.В., Швачко С.Н. Оптимизация железобетонных плит с использованием генетического алгоритма // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 1 (258). С. 30-36.
18. Серпик И.Н., Муймаров К.В., Швачко С.Н. Оптимальное проектирование железобетонных полов на грунтовом основании // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2016. № 2 (42). С. 23-32.
19. Станкевич И.В. Математическое моделирование задач теории упругости с односторонними связями // Символ науки. Уфа: ООО «Омега Сайнс», 2015. № 9-1. С. 28-33.
20. Тамразян А.Г., Манаенков И.К. Учет свойств ограниченного бетона при расчете несущей способности плит перекрытий // Строительство. Наука и образование. 2015. № 6. С. 98-105.
21. Руководство пользователя STARK ES 2016. М.: Еврософт, 2016. 405 с.
22. ГОСТ 10180-2012. Бетоны. Методы определения прочности по контрольным образцам. М.: Стандартиформ, 2013. 36 с.
23. СП 63.13330.2012. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003. М.: ОАО «НИЦ «Строительство», 2012. 155 с.
24. EN 1992-1-1:2004 (E). Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings. London: BSI, 2004. 225 p.
25. Serpik I.N., Shvachko S.N., Muymarov K.V. Optimization of reinforced concrete slabs on discrete sets of design parameters // International Journal of Applied Engineering Research. 2016. Vol. 11. N. 5. P. 3304-3308.

Поступила в редакцию 03.03.17

UDC 691.328-413

I.N. Serpik, Doctor of Engineering Sciences, Professor, Bryansk State Engineering Technological University (Bryansk, Russia) (e-mail: inserpik@gmail.com)

K.V. Muymarov, Postgraduate, Bryansk State Engineering Technological University (Bryansk, Russia) (e-mail: kirillmkw@mail.ru)

S.N. Shvachko, Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Bryansk State Engineering Technological University (Bryansk, Russia) (e-mail: sshvachko@mail.ru)

ALGORITHM FOR DEFORMATION ANALYSIS AND EXPERIMENTAL STUDY OF REINFORCED CONCRETE SLABS WITH UNILATERAL BONDS

A computation scheme for the analysis of reinforced concrete slabs using the finite element method providing possibility to consider unilateral connections has been developed. The stress-strain state of a slab is modeled taking into account physically nonlinear behavior of concrete and reinforcement, reinforcement discreteness, formation of transverse cracks in concrete. Kirchhoff hypotheses are considered to be true for a slab as a whole. It is believed that reinforcement out of cracks has a perfect adhesion with concrete. Concrete is represented by a system of thin layers, each of which is in a two-dimensional stress state. Approximation of displacements in this multilayer scheme is performed using triangular plate finite elements. Deformation of the reinforcement is described by means of rods working only in tension or compression. Unilateral connections are the contact finite elements. Concrete strength is evaluated according to Karpenko criterion. Deformation of concrete between cracks is described in accordance with Murashev's approach. On the basis of the principle of virtual displacements assembling of elements takes place. A secant method case providing the convergence of the iterative process for a complex nonlinear problem of this type is proposed. At the first stage, a step-by-step increase of external forces is provided until the actual level of loading is achieved. Only

one iteration of the secant method is performed at each step. Then, the iterative solution of the problem with repeated change of secant modulus is applied. The efficiency of this algorithm is confirmed on the basis of theoretical analysis and experiment for a rectangular in terms of bending reinforced concrete slab with free bearing on three sides, and not fixed on the fourth side. Three slab samples were tested and formation of cracks was monitored, measurement of deformations and displacements were performed

Key words: reinforced concrete slabs, unilateral connections, physical nonlinearity, cracks, secant method, experiment.

DOI: 10.21869/2223-1560-2017-21-2-99-109

For citation: Serpik I.N., Muymarov K.V., Shvachko S.N. Algorithm for Deformation Analysis And Experimental Study Of Reinforced Concrete Slabs With Unilateral Bonds, Proceeding of Southwest State University, 2017, vol. 21, no. 2(71), pp. 99-109 (in Russ.).

Reference

1. Averin A.N., Puzakov A.Ju. Raschet sistem s odnostoronnimi svyazjami // Stroitel'naja mehanika i konstrukcii. 2015. № 10. T. 1. S. 15-32.
2. Bondarenko V.M., Rimshin V.I. Kvazilinejnye uravnenija silovogo soprotivlenija i diagramma σ ϵ betona // Stroitel'naja mehanika inzhenernykh konstrukcij i sooruzhenij. 2014. №6. S. 40-44.
3. Bondarenko V.M. K voprosu o konceptual'nyh osnovah teorii zhelezobetona // Beton i zhelezobeton. 2001. №2. S. 16-18.
4. Voronin Z.A. K postroeniju metodiki rascheta zhelezobetonnyh plit s treshhinami na baze sloistoj modeli MKJe // Tez. dokl. 55-j nauch. studen. konf. 2003. S. 100-109.
5. Zyrjanov V.S. Prostranstvennaja rabota zhelezobetonnyh plit, opjortyh po konturu. M.: CNIIJeP, 2002. 109 s.
6. Karpenko N.I. Obshhie modeli mehaniki zhelezobetona. M.: Strojizdat, 1996. 416 s.
7. Karpenko N.I., Radajkin O.V. K sovershenstvovaniju diagramm deformirovanija betona dlja opredelenija momenta treshhinoobrazovanija i razrushajushhego momenta v izgibaemyh zhelezobetonnyh jelementah // Stroitel'stvo i rekonstrukcija. 2012. Vyp. 3. S. 10-15.
8. Kljueva N.V., Gornostaev S.I. K voprosu vybora raschetnoj modeli dlja ocenki zhestkosti zhelezobetonnyh konstrukcij // Izvestija Jugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. 2016. № 1(64). S. 71-74.
9. Kljueva N.V., Buhtijarova A.S., Prokopenko V.V. K opredeleniju parametra zhivuchesti prostranstvennykh konstruktivnykh sistem smeshannym metodom // Izvestija Jugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. 2011. № 3(36). S. 146-149.
10. Kolchunov V.I., Androsova N.B. Kriterij prochnosti ploskonaprjazhennogo korrozionno povrezhdaemogo jelementa i ego prilozhenie k raschetu zhelezobetonnyh konstrukcij // Stroitel'naja mehanika inzhenernykh konstrukcij i sooruzhenij. 2011. № 1. S. 13-19.
11. Kumpjak O.G., Galjautdinov Z.R. Jeksperimental'nye issledovanija opertyh po konturu zhelezobetonnyh plit s rasporom // Vestnik Tomsk. gosud. arh.-stroit. univ. 2015. №3 (50). S. 113-120.
12. Lukashevich A.A., Rozin L.A. O reshenii kontaktnyh zadach stroitel'noj mehaniki s odnostoronnimi svyazjami i treniem metodom poshagovogo analiza // Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal. 2013. № 1 (36). S. 75-81.
13. Osovskih E.V., Kolchunov V.I., Afonin P.A. Deformirovanie, treshhinoobrazovanie i razrushenie jekspluatiruemyh zhelezobetonnyh skladchatyh pokrytij v predel'nyh i zapredel'nyh sostojanijah // Stroitel'stvo i rekonstrukcija. 2013. №1(45). S. 26-32.
14. Paljuvina S.N. Sovershenstvovanie raschjota prochnosti i treshhinos-

tojkosti zhelezobetonnyh plit na osnove chislennyh metodov: avtoref. dis. ... kand. tehn. nauk: 05.23.01. Belgorod, 2000. 28 s.

15. Serpik I.N. Treugol'naja diskretizacija tonkih obolochek na osnove modifitsirovannogo podhoda k kusochnomu testirovaniyu v metode konechnykh jelementov // Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij. 2010. № 1. S. 27-33.

16. Serpik I.N., Mujmarov K.V., Shvachko S.N. Analiz deformirovaniya zhelezobetonnyh plit s uchetoм diskretnosti armatury i fizicheskoy nelinejnosti // Nauchnoe obozrenie. 2014. № 8-1. S. 70-75.

17. Serpik I.N., Mujmarov K.V., Shvachko S.N. Optimizacija zhelezobetonnyh plit s ispol'zovaniem geneticheskogo algoritma // Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij. 2015. № 1 (258). S. 30-36.

18. Serpik I.N., Mujmarov K.V., Shvachko S.N. Optimal'noe proektirovanie zhelezobetonnyh polov na gruntovom osnovanii // Nauchnyj vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Stroitel'stvo i arhitektura. 2016. № 2 (42). S. 23-32.

19. Stankevich I.V. Matematicheskoe modelirovanie zadach teorii uprugosti s od-

nostoronnimi svyazjami // Simvol nauki. Ufa: ООО «Omega Sajns», 2015. № 9-1. S. 28-33.

20. Tamrazjan A.G., Manaenkov I.K. Uchet svojstv ogranichenного бетона pri raschete nesushhej sposobnosti plit perekrytij // Stroitel'stvo. Nauka i obrazovanie. 2015. № 6. S. 98-105.

21. Rukovodstvo pol'zovatelja STARK ES 2016. M.: Evrosoft, 2016. 405 s.

22. GOST 10180-2012. Betony. Metody opredelenija prochnosti po kontrol'-nym obrazcam. M.: Standartinform, 2013. 36 s.

23. SP 63.13330.2012. Betonnye i zhelezobetonnye konstrukcii. Osnovnye polozhenija. Aktualizirovannaja redakcija SNiP 52-01-2003. M.: OAO «NIC «Stroitel'stvo», 2012. 155 s.

24. EN 1992-1-1:2004 (E). Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings. London: BSI, 2004. 225 p.

25. Serpik I.N., Shvachko S.N., Mujmarov K.V. Optimization of reinforced concrete slabs on discrete sets of design parameters // International Journal of Applied Engineering Research. 2016. Vol. 11. N. 5. P. 3304-3308.