УДК 624.075

Л.Ю. Ступишин, канд. техн. наук, профессор, ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет» (Курск, Россия) (e-mail: lusgsh@yandex.ru)

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КРИТЕРИЕВ УСТОЙЧИВОСТИ КОНСТРУКЦИЙ. СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ. ЧАСТЬ 1

Рассматривается одно из наиболее важных предельных состояний – потеря устойчивости формы конструкциями. Несмотря на то, что в течение длительного времени этому виду предельного состояния уделяется пристальное внимание исследователями, нет единого мнения о причинах его возникновения и, соответственно, единого подхода к формулированию критериев, определяющих критическое состояние. Наиболее популярные в строительной механике и теории устойчивости сооружений - энергетические критерии в форме Тимошенко и Брайана. В первом случае исследуется полная работа всех сил, действующих на систему в момент потери устойчивости. Во втором - внутренняя энергия системы, что позволяет решать задачи с учетом тепловых и аналогичных им воздействий. Несмотря на простоту формулировки первого подхода и общность второго, сложно утверждать, что ими может быть охвачен весь спектр задач устойчивости, возникающих в технике. Критерий критических уровней энергии позволяет ставить и решать задачи устойчивости без ограничений малости перемещений, вида воздействий на систему, и предназначен для формулирования пограничных состояний. Для понимания сути упомянутых критериев и иллюстрации различий предлагаются простые задачи в виде систем с сосредоточенными параметрами.

Рассматриваются критерии устойчивости конструкций на примере систем с одной степенью свободы. Анализируются постановки и решение задач устойчивости в форме Тимошенко, Брайана и критерия критических уровней энергии. Показаны достоинства и недостатки рассматриваемых подходов к исследованию устойчивости на примере модели конструкции с одной степенью свободы.

Ключевые слова: *устойчивость конструкций, системы с распределенными параметрами, критическая сила, критерий устойчивости в форме Тимошенко, критерий устойчивости в форме Брайана, критерий критических уровней энергии.*

DOI: 10.21869/2223-1560-2017-21-1-36-42

Ссылка для цитирования: Ступишин Л.Ю. Сравнительный анализ критериев устойчивости конструкций. Системы с одной степенью свободы. Часть 1 // Известия Юго-Западного государственного университета. 2017. Т. 21, № 1(70). С. 36–42.

***

Введение

Потеря устойчивости конструкцией – одно из важнейших предельных состояний, которому уделяется большое внимание на протяжении долгого времени. Однако до сих пор нет единого мнения о причинах его проявления и, соответственно, критериях его характеризующих. Наиболее популярные в среде инженеров и исследователей энергетические критерии имеют две общепризнанные формулировки: критерий устойчивости в форме Тимошенко и критерий устойчивости в форме Брайана [1, 2, 3]. Однако сложно утверждать, что указанные подходы позволяют исследовать весь спектр задач, возникающих в технике. Одним из альтернативных подходов может стать вариационный критерий критических уровней энергии, предложенный в [4]. Ниже приводится сравнительный анализ указанных подходов к исследованию устойчивости систем на простом примере системы с одной степенью свободы.

Рассмотрим упруго деформирующуюся систему, подверженную сжатию, показанную на рисунке 1. Приведенная расчетная схема отличается от классической, предложенной Тимошенко, тем, что описывается начальная стадия деформирования – сжатие стержня, на которой происходит запасание потенциальной энергии деформации. Это необходимо для описания поведения системы согласно представлениям Брайана. Поэтому формально система имеет две степени свободы: продольное перемещение и вращение вследствие потери устойчивости. Однако для описания процесса потери устойчивости будет использоваться степень свободы, характеризующая отклонение стержня от начального положения в момент потери устойчивости.

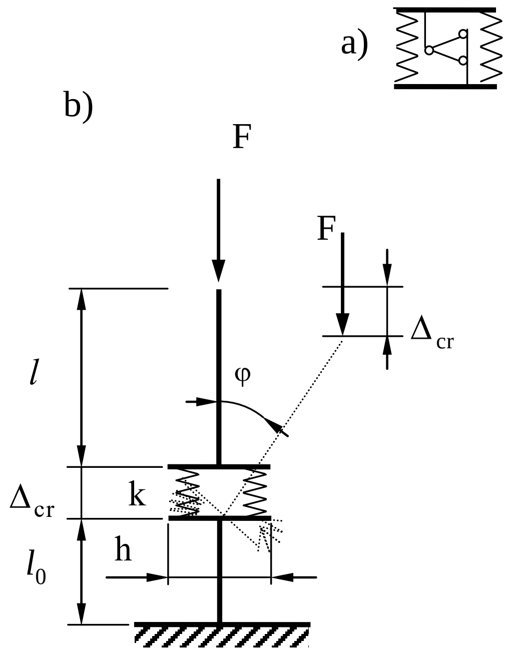

Рис. 1. a – модель упругого шарнира; b – модель системы с одной степенью свободы

Энергетический критерий устойчивости в форме Тимошенко

Следуя автору критерия, мы пренебрегаем рассмотрением стадии запасания энергии, а рассматриваем систему в момент потери устойчивости, когда сжимающая сила достигает критического значения. Система теряет начальную форму и меняет вид деформирования, получая отклонение на угол φ. При этом внешняя сила F_C совершает возможную работу при переходе системы в новое равновесное состояние

$$W_{ex} = F_c\Delta, \tag{1}$$

где перемещение силы можно представить через бесконечно малый угол поворота в виде:

$$\Delta = l\varphi^2/2. \tag{2}$$

При этом действительную работу внутренних сил, или потенциальную энергию, запасаемую упругими пружинами при переходе системы в новое положение, можно записать как

$$W_{in} = \int M d\varphi. \tag{3}$$

Момент, создаваемый реактивными силами упругих элементов, с учетом малости перемещений, определится соотношением:

$$M = rh^2\varphi / 2. \tag{4}$$

Полную энергию системы можно представить как сумму работы внешних сил и внутренних усилий

$$\Pi = F_c l\varphi^2/2 - rh^2\varphi^2/4. \tag{5}$$

Условие минимума полной энергии деформации системы, находящейся в состоянии равновесия, дает:

$$\partial\Pi/\partial\varphi = 0. \tag{6}$$

Откуда получим выражение критической силы для системы, представленной на рисунке 1:

$$F_c = rh^2/2\ell^2. \quad (7)$$

Величина критической силы полностью совпадает с выражениями, полученными в [1, 2] для классической модели Тимошенко. Это объясняется одинаковым представлением процесса потери устойчивости. Как известно, при таком подходе и использовании классической модели получить величину критического перемещения не удается

Предложенная модель системы (рис.1), тем не менее, позволяет оценить критические перемещения, поскольку учитывает историю нагружения системы до момента потери устойчивости. Если записать равенство работ внешних сил и внутренних усилий к моменту достижения критических продольных перемещений, получим

$$2r\Delta_c^2/2 = F_c\Delta_c/2. \quad (8)$$

Откуда имеем

$$F_c = 2r\Delta_c \ . \quad (9)$$

Окончательно, с учетом (7) запишем выражение для критических перемещений:

$$\Delta_c = h^2/4l. \quad (10)$$

Энергетический критерий устойчивости в форме Брайана

Подход Брайана отличается от подхода Тимошенко тем, что исследуется работа внутренних усилий системы. При этом учитывается запасенная до момента потери устойчивости энергия деформации, которая затем расходуется на приведение системы в новое равновесное состояние.

Критическая величина продольного усилия, возникающего к моменту потери устойчивости, может быть представлена в виде, аналогичном (9) предыдущего раздела

$$N_c = 2r\Delta_c. \quad (11)$$

Тогда изгибающий момент вращающий систему к новому состоянию равновесия будет иметь вид:

$$M = rh^2\sin(\varphi/2). \quad (12)$$

После подстановки (12) в выражение (3) и интегрирования получим представление потенциальной энергии деформации или работы внутренних усилий по приведению системы в начальное равновесное положение в виде:

$$W_{in} = 2rh^2(\cos(\varphi/2) - 1).$$

(13)

С другой стороны, запасенная энергия (13) возникла вследствие возможной работы внешней силы по приведению системы в новое равновесное состояние. Возможная работа внутренней продольной силы, достигшей критического значения, и не изменявшей своего значения при переходе системы в новое равновесное состояние, может быть представлена в виде

$$W_{ex} = 2r\Delta_c l(1 - \cos\varphi). \quad (14)$$

Тогда баланс внутренней потенциальной энергии системы можно записать как:

$$U = 2r\Delta_c l(1-\cos\varphi) - 2rh^2(1-\cos(\varphi/2)). \quad (15)$$

Условие стационарности потенциальной энергии

$$\partial U/\partial\varphi = 0, \quad (16)$$

приводит к выражению для величины критических продольных перемещений:

$$\Delta_c = h^2\sec(\varphi/2)/(4l). \quad (17)$$

На рисунке 2 показан график изменения критических перемещений в зависимости от угла отклонения системы, характеризующего новое равновесное состояние. Как видим, зависимость имеет периодический характер.

Минимальное значение перемещения, при котором происходит потеря устойчивости, полученное из (17):

$$\Delta_c^{min} = h^2/(4l). \quad (18)$$

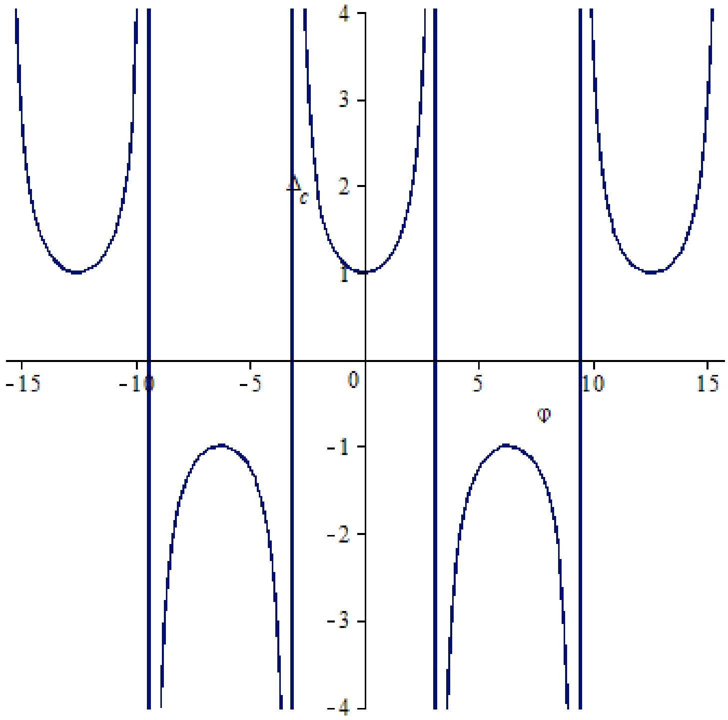

Рис.2. Зависимость критических перемещений от угла отклонения системы

Оно полностью совпадает со значением предыдущего раздела (10), выведенным из других предпосылок.

Критическое продольное усилие по аналогии с (7) будет иметь вид

$$N_c = rh^2 \sec(\varphi/2)/(2\ell). \qquad (19)$$

Минимальное значение, соответствующее потере устойчивости

$$N_c^{min} = rh^2/(2\ell). \qquad (20)$$

Критерий критических уровней энергии

На критических уровнях энергии система находится в самоуравновешенном состоянии, когда баланс работ внутренних усилий минимален:

$$W_{in} = W_{in}^N - W_{in}^\varphi \to \min, \qquad (21)$$

при условии нормировки параметров, определяющих критическое состояние системы:

$$\bar{\Delta}_c^{\,2} + \varphi_c^2 = 1. \qquad (22)$$

Введем безразмерные переменные:

$$\bar{\Delta}_c = \frac{\Delta_c}{l},\ \bar{W}_{in}^\varphi = \frac{W_{in}^\varphi}{kl^2},\ \bar{W}_{in}^N = \frac{W_{in}^N}{kl^2},\ n = \frac{h^2}{l^2}. \qquad (23)$$

Тогда уравнение Лагранжа для поставленной задачи будет иметь вид

$$L = 2n(\cos(\varphi_c/2)-1) - 2\bar{\Delta}_c^{\,2} + \lambda(\bar{\Delta}_c^{\,2} + \varphi_c^2 - 1). \qquad (24)$$

Из условий стационарности функции Лагранжа по переменным

$$\partial L/\partial\bar{\Delta}_c = 0, -\partial L/\partial\varphi_c = 0, \qquad (25)$$

получим

$$\lambda_{\Delta_c} = \frac{1}{2},\ \lambda_{\varphi_c} = n\sin(\varphi_c/2)/2\varphi_c. \qquad (26)$$

В случае бесконечно малых величин углов отклонения системы от начального положения равновесия, получим величины критических перемещений и продольных усилий, совпадающих с величинами, приведенными в предыдущих разделах (7), (10), (18), (20).

$$\Delta_c = \bar{\Delta}_c\lambda_{\varphi_c} = \frac{h^2\sin(\varphi_c/2)}{2l\varphi_c} \approx \frac{h^2}{4l}. \qquad (27)$$

$$N_c = 2r\Delta_c = \frac{2rh^2 \sin(\varphi_c/2)}{2l\varphi_c} \approx \frac{rh^2}{2l}. \quad (28)$$

Из условий нормировки можно получить связь между продольным перемещением и углом отклонения, а также предельное значение угла отклонения системы.

$$\bar{\Delta}_k = -\sin(\varphi/2) \pm \sqrt{1-\varphi^2}. \quad (29)$$

Функция критических перемещений будет иметь минимум в случае

$$\frac{d\bar{\Delta}_k}{d\varphi} = -\cos(\varphi/2)/2 \pm \varphi\Big/\sqrt{1-\varphi^2} = 0. \quad (30)$$

Этому условию соответствует угол $\varphi = 0,685611$.

Выводы

Энергетический критерий в форме Тимошенко исследует систему вблизи начального состояния равновесия, в предположении бесконечной малости деформаций и отклонений от начального равновесного состояния. В результате, не позволяют дать оценку перемещениям системы к моменту потери устойчивости и другие важные свойства упругих систем. Однако метод прост, и очевиден как в формулировке задачи, так и ее математической постановке, при оценке величины критической нагрузки.

Энергетический критерий в форме Брайана справедлив для консервативных систем и учитывает историю деформирования. Математическая модель задачи позволяет учитывать малые конечные перемещения, а запись энергетических соотношений не зависит от вида приложенной внешней нагрузки, что в ряде задач дает значительные преимущества [1]. Из полученных соотношений следует периодическая закономерность критических параметров системы.

Критерий критических уровней энергии в своей формулировке основан на гипотезе о существовании критических уровней энергии конструкции и периодичности ее свойств. Ограничения в виде условия нормировки позволяют не снять условие малости перемещений, и рассматривать конечные величины параметров проектирования. Наиболее общая запись энергии в виде условия самоуравновешенности системы позволяет не зависеть ни от пути деформирования, ни от вида прикладываемых нагрузок. Требование консервативности системы сохраняется.

Список литературы

1. Алфутов Н.А. Основы расчёта на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1991. – 336 с.

2. Ржаницын А.Р. Устойчивость равновесия упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1955. – 475 с.

3. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, ошибки и парадоксы. – М.: Наука, 1979. – 384 с.

4. Ступишин Л.Ю. Вариационный критерий критических уровней внутренней энергии деформируемого тела // Промышленное и гражданское строительство. – 2011. – № 8. – С. 21-23.

5. Ступишин Л.Ю.. Никитин К.Е. Методика оптимального проектирования ребристых оболочек // Известия Юго-Западного государственного университета. – 2011. – № 5 (38). Ч. 2. – С. 227-232.

6. Stupishin L.U. Variational Criteria for Critical Levels of Internal Energy of a Deformable Solids//Applied Mechanics and Materials. – Vols. 578-579 (2014), pp. 1584-1587.

7. Stupishin L.U. & Kolesnikov A.G. 2014a. Geometric Nonlinear Orthotropic

Shallow Shells Investigation //Applied Mechanics and Materials. – Vols. 501-504 (2014), pp. 766-769.

8. Stupishin L.U. & Kolesnikov A.G. 2014b. Geometric Non-linear Shallow Shells for Variable Thickness Investigation // Advanced Materials Research Vols. 919-921 (2014), pp. 144-147© (2014) Trans Tech Publications, Switzerland doi:10.4028/ www.scientific.net/AMR.919-921.144

9. Stupishin L.U. & Kolesnikov, A.G. 2014c. Reconstruction of Shallow Shells for increase Bearing Capacities and Operating Characteristics// Applied Mechanics and Materials Vols. 580-583 (2014), pp. 3062-3065 © (2014) Trans Tech Publications, Switzerland doi:10.4028/ www.scientific.net/ AMM.580-583.3062

10. Stupishin, L.U. & Nikitin, K.E. 2014. Mixed finite element of geometrically nonlinear shallow shells of revolution // Applied Mechanics and Materials. Vols. 501-504 (2014), pp. 514-517© (2014) Trans Tech Publications, Switzerland doi: 10.4028/ www.scientific.net/ AMM.501-504.514.

Поступила в редакцию 04.12.16

UDC 624.075

L.U. Stupishin, Candidate of Engineering Sciences, Professor**,** Southwest State University (Kursk, Russia) (e-mail: lusgsh@yandex.ru)

COMPARATIVE ANALYSIS OF STRUCTURE STABILITY. SYSTEMS WITH ONE DEGREE OF FREEDOM. PART 1

The paper considers the loss of structure stability as one of the most important marginal states. Though this type of limit conditions has been closely studied, there is still no agreement on their causes, hence, there is no uniform approach to defining the criteria that determine the critical state. The most popular criteria known in the structural analysis and the theory of structural stability are energy criteria of stability in the form of Timoshenko or Bryan. In the first case the analysis covers total work of all forces affecting the system at the moment of collapse. In the second the analysis deals with the system internal energy, which allows us to solve the problems considering thermal and similar effects. In spite of the simplicity of the first approach and general character of the second one, it is hardly possible to assert that they can be sufficient to cover the total scope of stability problems that may arise in engineering. The criterion of critical energy critical level permits us to formulate and solve stability problems without any limitations related with the smallness of displacements or the types of impacts affecting a system, so it can be applied to formulate boundary conditions. For better understanding of the said criteria and their illustration the paper presents some simple problems in the form of systems with lumped parameters.

Structure stability criteria are studied as in case of the systems with one degree of freedom. The analysis covers the statements and solutions of stability problems in the form of Timoshenko, Bryan and the criterion of energy critical levels. These approaches are reviewed in terms of their advantages and disadvantages using the example of the model of a structure with one degree of freedom.

Key words: *structure stability, systems with distributed parameters, critical load, criterion of stability in the form of Timoshenko, criterion of stability in the form of Bryan, criterion of energy critical levels.*

DOI: 10.21869/2223-1560-2017-21-1-36-42

For citation: Stupishin L.U. Comparative Analysis of structure stability. Systems with one Degree of Freedom. Part 1, Proceeding of Southwest State University, 2017, vol. 21, no. 1(70), pp. 36-42 (in Russ.).

Reference

1. Alfutov N.A. Osnovy raschjota na ustojchivost' uprugih sistem. – M.: Mashinostroenie, 1991. – 336 s.

2. Rzhanicyn A.R. Ustojchivost' ravnovesija uprugih sistem. – M.: Gostehizdat, 1955. – 475 s.

3. Panovko Ja.G., Gubanova I.I. Ustojchivost' i kolebanija uprugih si-stem: Sovremennye koncepcii, oshibki i paradoksy. – M.: Nauka, 1979. – 384 s.

4. Stupishin L.Ju. Variacionnyj kriterij kriticheskih urovnej vnutrennej jenergii deformiruemogo tela // Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo. – 2011. – № 8. – S. 21-23.

5. Stupishin L.Ju.. Nikitin K.E. Metodika optimal'nogo proektirovanija rebristyh obolochek // Izvestija Jugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. – 2011. – № 5 (38). C. 2. – S. 227-232.

6. Stupishin L.U. Variational Criteria for Critical Levels of Internal Energy of a Deformable Solids//Applied Mechanics and Materials. – Vols. 578-579 (2014), pp. 1584-1587.

7. Stupishin L.U. & Kolesnikov A.G. 2014a. Geometric Nonlinear Orthotropic Shallow Shells Investigation //Applied Mechanics and Materials. – Vols. 501-504 (2014), pp. 766-769.

8. Stupishin L.U. & Kolesnikov A.G. 2014b. Geometric Non-linear Shallow Shells for Variable Thickness Investigation // Advanced Materials Research Vols. 919-921 (2014), pp. 144-147© (2014) Trans Tech Publications, Switzerland doi:10.4028/ www.scientific.net/AMR.919-921.144

9. Stupishin L.U. & Kolesnikov, A.G. 2014c. Reconstruction of Shallow Shells for increase Bearing Capacities and Operating Characteristics// Applied Mechanics and Materials Vols. 580-583 (2014), pp. 3062-3065 © (2014) Trans Tech Publications, Switzerland doi:10.4028/ www.scientific.net/ AMM.580-583.3062

10. Stupishin, L.U. & Nikitin, K.E. 2014. Mixed finite element of geometrically nonlinear shallow shells of revolution // Applied Mechanics and Materials. Vols. 501-504 (2014), pp. 514-517© (2014) Trans Tech Publications, Switzerland doi: 10.4028/ www.scientific.net/ AMM.501-504.514.