

УДК 519.7

<https://doi.org/10.21869/2223-1560-2024-28-4-40-56>

Бифуркации в кусочно-линейной дискретной модели широотно-импульсной системы управления

Ж. Т. Жусубалиев¹ ✉, Е. Н. Иванова¹, У. А. Сопуев²,
Ж. Т. Жумашева³, Д. Ю. Цуканов¹

¹ Юго-Западный государственный университет
ул. 50 лет Октября, д. 94, г. Курск 305040, Российская Федерация

² Ошский государственный университет
ул. Ленина, д. 331, г. Ош 723500, Кыргызстан

³ Казахский национальный университет им. аль-Фараби
пр. аль-Фараби, д. 71, г. Алматы 050040, Казахстан

✉ e-mail: zhanybai@gmail.com

Резюме

Цель работы. Исследуются вырожденные бифуркации («degenerate bifurcations») и бифуркации слияния («merging») хаотических аттракторов в системе управления с широкоотно-импульсной модуляцией, поведение которой описывается бимодальным кусочно-линейным непрерывным отображением. Хорошо известно, что в кусочно-линейных отображениях классические бифуркации такие, как удвоения периода, транскритическая и виллообразная, становятся вырожденными, сочетающие свойства классических гладких бифуркаций и бифуркаций граничного столкновения («border collision bifurcations»).

Методы. Описано получение математической модели системы в форме кусочно-линейного отображения из векторного поля с разрывной правой частью методом построения стробоскопического отображения Пуанкаре. Выполнен анализ вырожденных бифуркаций удвоения периода методами теории критических линий в необратимых отображениях.

Результаты. Выявлено, что рассматриваемое отображение обладает необычным свойством, которое заключается в следующем. В точке бифуркации удвоения периода неподвижной точки появляется интервал I , на границах которого лежат две точки цикла удвоенного периода. Причем, любая точка I , есть периодическая точка с периодом два. Доказано, что точки цикла удвоенного периода, лежащие на границе указанного интервала, совпадают с двумя многообразиями переключения. В качестве конкретного примера реальной физической системы, изучение которой сводится к кусочно-линейному отображению, рассмотрен преобразователь энергии с широкоотно-импульсным управлением. Приведены осциллограммы колебаний напряжения нагрузки, отвечающие неподвижной точке, циклу периода два и хаотическим режимам.

Заключение. Изучены вырожденные бифуркации удвоения периода колебаний и бифуркации слияния циклов хаотических интервалов. Бифуркации циклов хаотических интервалов известны еще как кризисы хаотических аттракторов («merging crisis»). В точке бифуркации неустойчивая неподвижная точка с отрицательным мультипликатором сталкивается с границами хаотических аттракторов. Границы же хаотических аттракторов образованы так называемыми критическими точками и их образами. В момент бифуркации возникает неглубокая гомоклиническая орбита. В силу того, что рассматриваемое отображение является кусочно-линейным, уравнения бифуркационных границ получены аналитически, решения которых находятся либо аналитически, либо численно.

Ключевые слова: бимодальное кусочно-линейное непрерывное отображение; многообразие переключения; вырожденные бифуркации; бифуркации граничного столкновения; бифуркации слияния хаотических аттракторов.

Конфликт интересов: Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Финансирование. Жусубалиев Ж.Т. и Иванова Е.Н. поддержаны Минобрнауки РФ в рамках «Программы стратегического академического лидерства Приоритет-2030» (1.7.21/4-24-7). Работа Сопуева У.А. поддержана грантом № 19-24 Ошского государственного университета.

Благодарности. Авторы благодарят проф. V.Avrutin Институт теории систем и автоматического управления. Университет Штутгарта, Германия (Institute for Systems Theory and Automatic Control, University of Stuttgart, Germany) за детальное обсуждение результатов работы, относящихся к теории вырожденных бифуркаций.

Для цитирования: Бифуркации в кусочно-линейной дискретной модели широтно-импульсной системы управления / Ж. Т. Жусубалиев, Е. Н. Иванова, У. А. Сопуев, Ж. Т. Жумашева, Д. Ю. Цуканов // Известия Юго-Западного государственного университета. 2024; 28(4): 40-56. <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2024-28-4-40-56>.

Поступила в редакцию 07.10.2024

Подписана в печать 30.10.2024

Опубликована 10.12.2024

Bifurcations in a piecewise-linear discrete model of the pulse modulated control system

Zhanybai T. Zhusubaliyev ¹ ✉, Elena N. Ivanova ¹, Ulanbek A. Sopuev ²,
Zhadira T. Zhumasheva ³, Dmitriy Yu. Tsukanov ¹

¹ Southwest State University
50 Let Oktyabrya str. 94, Kursk 305040, Russian Federation

² Southwest State University
331, Lenin str., Osh 723500, Kyrgyzstan

³ Southwest State University
71, al-Farabi Ave, Almaty 050040, Kazakhstan

✉ e-mail: zhanybai@gmail.com

Abstract

Purpose. In this paper we study degenerate bifurcations and merging bifurcations of chaotic attractors in a pulse-width modulated control system, the behavior of which is described by a bimodal piecewise linear continuous mapping. It is well

known that in piecewise linear maps, classical bifurcations such as period doubling, transcritical and pitchfork, become degenerate, combining the properties of classical smooth bifurcations and border collision bifurcations.

Methods. First we describe a technique for obtaining of a piecewise linear mapping from a vector field with a discontinuous right-hand side using the method construction of the Poincare map. Then are investigated degenerate period -doubling bifurcations by methods of the theory of critical lines for non-invertible maps.

Results. We found that the considered mapping has an unusual property, which is as follows. At the flip bifurcation point for a fixed point, an interval I appears, on the boundaries of which two points of the period doubled cycle lie. Moreover, any point of this interval is a periodic point with a period of two. We have proved that periodic points with a period of two lying on the boundaries of this interval coincide with two switching manifolds. As a specific example of a real physical system, we consider a power converter system with pulse width modulated control, which is modeled by a piecewise linear mapping. Moreover, we experimentally show a fixed point, a 2-cycle and chaotic oscillations.

Conclusion. Finally we have studied degenerate period-doubling bifurcations and merging bifurcations of cyclic chaotic attractors. Such bifurcation is also known as a merging crisis. At the bifurcation point, an unstable fixed point with a negative multiplier collides with the boundaries of a chaotic attractor. It is well known, that the boundaries of a chaotic attractor are formed by the so-called critical points and their images. At the moment of bifurcation, a homoclinic orbit arises. Due to the fact that the considered mapping is piecewise linear, the equations of bifurcation boundaries are obtained analytically, the solutions of which are either analytically or numerically.

Keywords: bimodal piecewise-linear continuous map; switching manifolds; degenerate bifurcations; border-collision bifurcations; merging bifurcations of chaotic attractors.

Conflict of interest. The authors declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

Funding. Zhusubaliyev Zh.T. and Ivanova E.N. were supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the framework of the Strategic Academic Leadership Program Priority 2030 (1.7.21/4-24-7). Sopuev's work was supported by grant No. 19-24 from Osh State University.

Acknowledgments. The Authors would like to thank Professor V.Avrutin, Institute of Systems Theory and Automatic Control, University of Stuttgart, Germany (Institute for Systems Theory and Automatic Control, University of Stuttgart, Germany) for a detailed discussion of the results of the work related to the theory of degenerate bifurcations.

For citation: Zhusubaliyev Zh.T., Ivanova E.N., Sopuev U.A., Zhumasheva Zh.T., Tsukanov D.Yu. Bifurcations in a piecewise-linear discrete model of the pulse modulated control system. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta = Proceedings of the Southwest State University*. 2024; 28(4): 40-56 (In Russ.). <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2024-28-4-40-56>.

Received 07.10.2024

Accepted 30.10.2024

Published 10.12.2024

Введение

Рассмотрим импульсную систему с непрерывной линейной частью и модулятором (М), структурная схема которой изображена на рис. 1. Модулятор осуществляет широтно-импульсную модуляцию второго рода (ШИМ-2) [1, 2]. Здесь q – задающий сигнал; x – выход системы; σ , f – сигналы на входе и выходе модулятора. Непрерывная линей-

ная часть представлена передаточной

функцией $W(s) = \frac{1}{1 + T_0 s}$, где T_0 – посто-

янная времени объекта управления.

Поведение такой системы описывается дифференциальным уравнением с разрывной правой частью [2, 3]

$$\dot{x} = \lambda(x - f(t, x)), \quad x, f \in \mathbb{R},$$

$$\sigma = q - x, \quad f(t, x) \equiv f(t+1, x). \quad (1)$$

Здесь $\dot{x}$ – производная x по безразмерному времени t ; $\lambda = -T/T_0$, где T – период модуляции.

В интервале $k < t < k+1$, $k = 0, 1, 2, \dots$ выходной сигнал f модулятора [4, 5]:

$$f = \begin{cases} 1, & k \leq t < t_k; \\ 0, & t_k \leq t < k+1. \end{cases} \quad (2)$$

Введем обозначение $z_k = t_k - k$, где z_k – ширина импульса. В системах с ШИМ-2 ширина импульса z_k находится:

$$z_k = \begin{cases} 0, & q - x_k \leq 0; \\ \frac{1}{\lambda} \ln \frac{q-1}{x_k-1}, & q - x_k > 0 \text{ и } q - 1 - e^\lambda (x_k - 1) < 0; \\ 1, & q - 1 - e^\lambda (x_k - 1) \geq 0. \end{cases}$$

$$x_k = x(t)|_{t=k}$$

Очевидно, что $0 \leq z_k \leq 1$. На рис. 2 показана модуляционная характеристика, из которой видно, что если $x_k \geq q$ или $x_k \leq \frac{q-1}{e^\lambda} + 1$, то модулятор насыщается. Тогда $z_k = 0$ или $z_k = 1$ – ширина импульса равна нулю или периоду внешнего воздействия, соответственно.

Если же $\frac{q-1}{e^\lambda} + 1 < x_k < q$, то $0 < z_k < 1$.

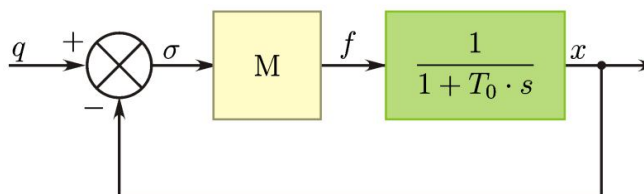


Рис. 1. Структурная схема системы управления

Fig. 1. Block diagram of the control system

Дифференциальные уравнения вида (1) сводятся к кусочно-гладким отображениям (см., например, [4-6])

$$F: x \mapsto F(x) = \begin{cases} F_{\mathcal{L}}(x), & x \leq c_{\mathcal{L}}; \\ F_{\mathcal{M}}(x), & c_{\mathcal{L}} < x < c_{\mathcal{R}}; \\ F_{\mathcal{R}}(x), & x \geq c_{\mathcal{R}}. \end{cases} \quad (4)$$

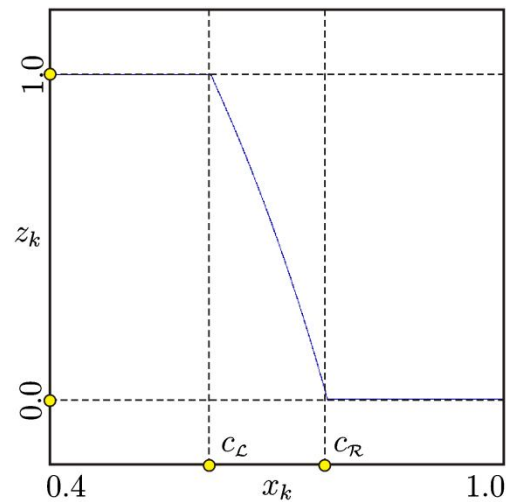


Рис. 2. Модуляционная характеристика:

$$c_{\mathcal{L}} = \frac{q-1}{e^\lambda} + 1, \quad c_{\mathcal{R}} = q$$

Fig. 2. Modulation characteristic:

$$c_{\mathcal{L}} = \frac{q-1}{e^\lambda} + 1, \quad c_{\mathcal{R}} = q$$

Каждая из $F_{\mathcal{L}}(x)$, $F_{\mathcal{M}}(x)$, $F_{\mathcal{R}}(x)$ в (4) есть гладкая функция в своей области определения $x < c_{\mathcal{L}}$, $c_{\mathcal{L}} \leq x < c_{\mathcal{R}}$, $x > c_{\mathcal{R}}$. Границы $c_{\mathcal{L}}$, $c_{\mathcal{R}}$ называются многообразиями переключения («switching manifolds»), в которых первая производная F по x не существует.

Неподвижные точки (4) отвечают периодическим решениям уравнения (1) с периодом внешнего воздействия. Как отмечено в [4, 5], в зависимости от параметров (4) может быть обратимым и не-

обратимым. Мы рассматриваем случай, когда (4) необратимое (см. также [4-7]).

При вариации параметров неподвижная/периодическая точка сталкивается с одним из многообразий переключения. Это приводит к широкому классу нелинейных явлений, получивших название бифуркаций граничного столкновения («border collision bifurcations») [8] или «С-бифуркаций» [9-11].

Бифуркации граничного столкновения не связаны с нарушением условия гиперболичности неподвижных/периодических точек и не имеют аналогов в гладких динамических системах [12-18]. По этой причине они не поддаются описанию и интерпретации методами классической нелинейной динамики [19, 20]. Более того, в кусочно-линейных отображениях классические бифуркации, такие как удвоения периода, транскритическая, вилообразная, становятся вырожденными («degenerate bifurcations»), сочетая свойства гладких бифуркаций и бифуркаций граничного столкновения [21, 22].

В данной работе исследуются вырожденные бифуркации и бифуркации хаотических аттракторов, известные еще как кризисы [23], которым посвящена часть статьи [4]. В отличие от [4] мы вводим простую дискретную модель, допускающую детальный численно-аналитический бифуркационный анализ. При этом оказывается, что модель сохраняет главное свойство кусочно-линейного отображения, которое доказано в [4].

Описана методика получения математической модели системы управления

в форме кусочно-линейного отображения из векторного поля с разрывной правой частью. Выполнен анализ вырожденных бифуркаций удвоения периода. Выявлено, что рассматриваемое отображение обладает и другим свойством, которое заключается в следующем.

В точке бифуркации удвоения периода неподвижной точки появляется интервал I , на границах которого лежат две точки цикла удвоенного периода. Причем, любая точка I есть периодическая точка с периодом два. Доказано, что точки цикла удвоенного периода, лежащие на границе I , совпадают с двумя многообразиями переключения.

В качестве конкретного примера реальной физической системы, изучение которой сводится к кусочно-линейному отображению, рассмотрен преобразователь энергии с широтно-импульсным управлением. Приведены осциллограммы колебаний напряжения нагрузки, отвечающие неподвижной точке, циклу периода два и хаотическим режимам.

Изучены бифуркации слияния циклов хаотических интервалов. Такие бифуркации известны еще как кризисы хаотических аттракторов («merging crisis»). В точке бифуркации неустойчивая неподвижная точка с отрицательным мультипликатором сталкивается с границами хаотических аттракторов. Границы же хаотических аттракторов образованы так называемыми критическими точками и их образами. В момент бифуркации возникает неглубокая гомоклиническая орбита. В силу того, что отображение являет-

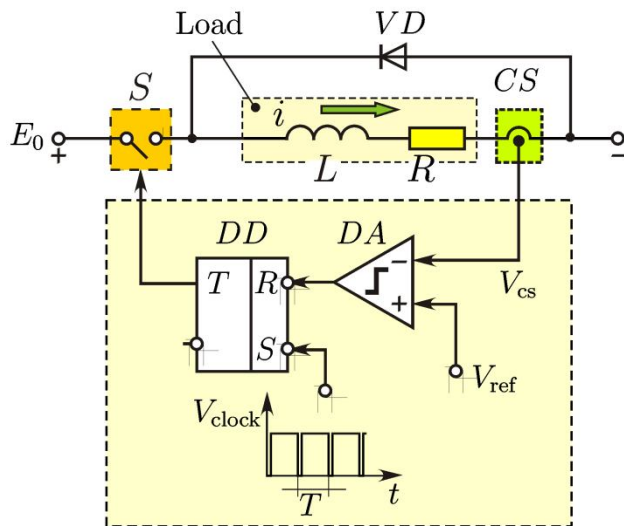
ся кусочно-линейным, уравнения бифуркационных границ получены аналитически, решения которых находятся либо аналитически, либо численно.

Материалы и методы

На рис. 3 (а) изображена функциональная схема системы, которая сводится к бимодальному кусочно-линейному отображению класса (4) с указанным в предыдущем разделе свойством. Здесь S – силовой транзисторный ключ;

VD – обратный диод; CS – датчик тока нагрузки («Load»); DA – компаратор; DD – управляющий RS -триггер. На рис. 3 (б) приведена фотография экспериментальной установки.

Такие системы широко применяются на практике, например, в промышленных электроприводах и электроприводах электрического транспорта, системах энергообеспечения технологического оборудования [24, 25].



а)



б)

Рис. 3. (а) Функциональная схема преобразователя постоянного напряжения, (б) Фотография экспериментальной установки

Fig. 3. (а) Circuit diagram of a DC voltage converter. (б) Photo of the experimental setup

Ключ S замыкается периодически с периодом внешнего воздействия V_{clock} , а размыкается, когда сигнал обратной связи V_{CS} превысит V_{ref} .

Состояние такой системы описывается дифференциальным уравнением

$$L \frac{di}{dt} = -Ri + E_0 f. \quad (5)$$

Здесь E_0 – напряжение питания; L , R – индуктивность и сопротивление нагрузки; $\bar{t}$ – время; функция f имеет тот же физический смысл, что и в (1).

После приведения (5) к безразмерному виду получим уравнение (1), в котором

$$x = \frac{Ri}{E_0}; \quad t = \frac{\bar{t}}{T}; \quad q = \frac{RV_{ref}}{\beta E_0}; \quad \lambda = -\frac{RT}{L},$$

где V_{ref} – задающий сигнал; $V_{CS} = \beta i$ – выходной сигнал датчика тока CS ; β – чувствительность CS .

Динамическая система (1) сводится к бимодальному кусочно-линейному отображению (4).

В пределах $k \leq t < t_k$ сигнал на выходе модулятора $f = 1$ и уравнение (1) принимает вид

$$\dot{x} = \lambda(x-1).$$

Решение этого уравнения с условием $x(k) = x_k$:

$$x(t) = 1 + e^{\lambda(t-k)}(x_k - 1).$$

Отсюда для $t = t_k$ имеем:

$$x(t_k) = 1 + e^{\lambda(t_k-k)}(x_k - 1).$$

В интервале $t_k < t < k+1$ сигнал $f = 0$ и уравнение (1) принимает вид

$$\dot{x} = \lambda x, \quad x(t_k) = 1 + e^{\lambda(t_k-k)}(x_k - 1), \quad (6)$$

решение которого:

$$x(t) = e^{\lambda(t-k)}(x_k - 1) + e^{\lambda(t-t_k)}.$$

Для момента времени $t = k+1$ с учетом введенного обозначения имеем:

$$x_{k+1} = e^{\lambda}(x_k - 1) + e^{\lambda(1-z_k)}. \quad (7)$$

Здесь z_k находится согласно (3).

Подставляя z_k в (7), получим: (см. также [4, 5]):

$$F: x \mapsto F(x)$$

$$F(x) = \begin{cases} F_c(x) = e^{\lambda} \cdot (x-1) + 1, & x \leq c_L; \\ F_M(x) = \frac{q}{q-1} \cdot e^{\lambda} \cdot (x-1), & c_L < x < c_R; \\ F_R(x) = e^{\lambda} \cdot x, & x \geq c_R. \end{cases} \quad (8)$$

где $c_L = \frac{q-1}{e^{\lambda}} + 1$, $c_R = q$.

Отображение (8) бимодальное кусочно-линейное (рис. 4) и имеет тип необратимости $Z_1-Z_3-Z_1$ [7, 22].

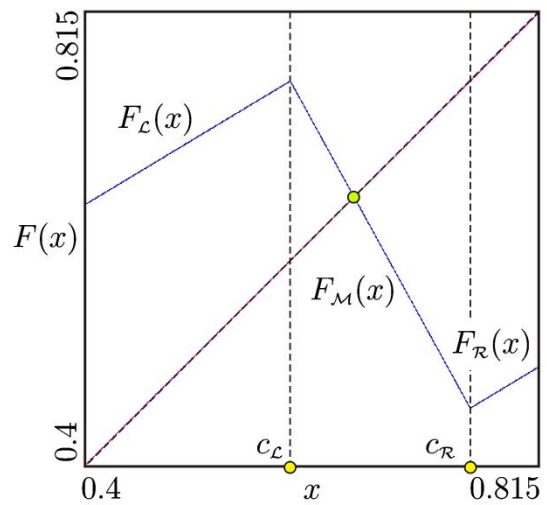


Рис. 4. Бимодальное кусочно-линейное отображение

Fig. 4. Bimodal piecewise linear map

Параметры (8):

$\lambda \approx -0,505$; $0,6 < q < 0,815$.

Результаты и их обсуждение

Вырожденные бифуркации, как мы отмечали вначале, подобны хорошо известным бифуркациям типа удвоения периода, транскритическая, вилообразная, и связаны с обращением мультипликатора неподвижной/периодической точки в ± 1 . Однако должны еще выполняться некоторые условия, детальное обсуждение которых приведено в

специальной литературе (см., например, [22] и цитируемую там литературу). Поэтому мы остановимся лишь на некоторых деталях. В частности, если мультипликатор неподвижной/периодической точки обращается в -1 , то это может привести не только к возникновению устой-

чивого цикла удвоенного периода, но и к рождению цикла хаотических интервалов.

На рис. 5 изображена бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая вырожденные бифуркации удвоения периода и бифуркации циклов хаотических интервалов.

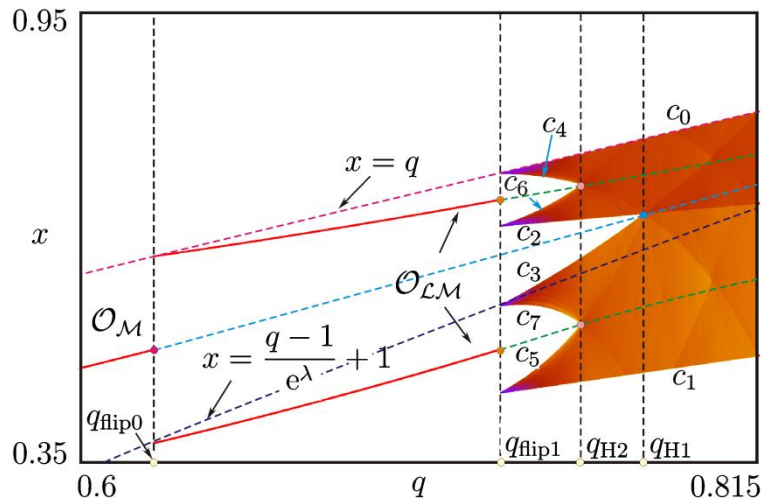


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма

Fig. 5. Bifurcation diagram

Как известно, в кусочно-гладких системах возможны разные типы периодических орбит с одинаковым периодом. Для описания периодического колебания конкретного типа далее будем использовать обозначение, принятое в [22] (см. также [4, 5]).

Отображение (8) имеет устойчивую неподвижную точку (цикл периода 1)

$$\mathcal{O}_M = \{x_0^M\}$$

$$x_0^M = \frac{e^\lambda q}{1 - q(1 - e^\lambda)}$$

в диапазоне

$$0 < q < q_{flip0}, \quad q_{flip0} = \frac{1}{1 + e^\lambda} \approx 0,62361743656$$

При $q = q_{flip0}$ неподвижная точка претерпевает вырожденную бифуркацию удвоения периода, когда мультипликатор

$$\rho(\mathcal{O}_M) = \frac{e^\lambda q}{q - 1}$$

обращается в -1 .

Утверждение 1. В точке q_{flip0} появляется интервал¹ $I = [\gamma_0; \gamma_1]$ (рис. 6 (а)), на границах которого лежат точки 2-цикла $\mathcal{O}_{LM}$, который возникает из 1-цикла (неподвижной точки $\mathcal{O}_M$) через вырожденную бифуркацию удвоения периода [22].

¹ Любая точка I за исключением неподвижной, является периодической с периодом два [22].

Причем обе точки $x_1^{\mathcal{LM}}, x_2^{\mathcal{LM}}$ цикла $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}$ совпадают с многообразиями пере-

ключения, т.е. $\gamma_0 = c_{\mathcal{L}}, \gamma_1 = c_{\mathcal{R}}$ соответственно (см. рис. 5 и 6).

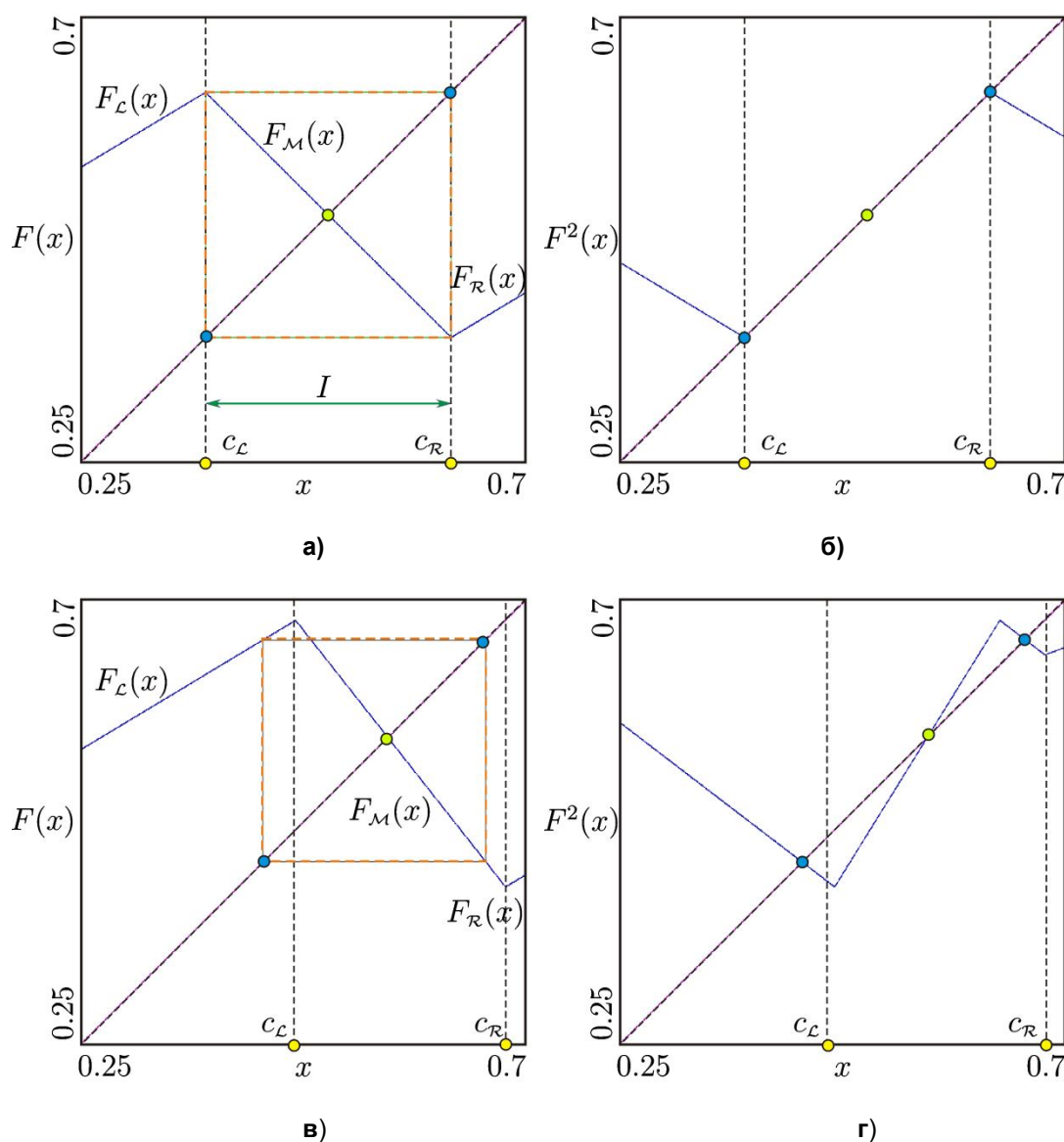


Рис. 6. Вырожденная бифуркация удвоения периода неподвижной точки $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$

Fig.6. Degenerate flip bifurcation of a fixed point $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$

Доказательство.

Докажем сначала, что

$$F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}}) = c_{\mathcal{R}} \quad (9)$$

для любых значений q (см. [4]), а при

$$q = \frac{1}{1 + e^{\lambda}} :$$

$$F_{\mathcal{R}}(c_{\mathcal{R}}) = c_{\mathcal{L}}. \quad (10)$$

Доказательство равенства (9) приведено в [4]. Поэтому остается доказать (10). Для этого найдем левую часть (10):

$$F_{\mathcal{R}}(c_{\mathcal{R}}) = \frac{e^{\lambda}}{1 + e^{\lambda}}.$$

Правая часть (10)

$$c_{\mathcal{L}} = \frac{q-1}{1+e^{\lambda}} + 1 = \frac{e^{\lambda}}{1+e^{\lambda}}.$$

Равенство (9) доказано.

В результате этой бифуркации возникает цикл удвоенного периода

$$\mathcal{O}_{\mathcal{LM}} = \{x_1^{\mathcal{LM}}, x_2^{\mathcal{LM}}\},$$

$$\text{где } x_1^{\mathcal{LM}} = \frac{e^{2\lambda}q}{1-q(1-e^{2\lambda})},$$

$$x_2^{\mathcal{LM}} = \frac{e^{2\lambda}q}{1-q(1-e^{2\lambda})} - e^{\lambda} + 1$$

а неподвижная точка $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ при переходе через бифуркационное значение q_{flip0} параметра q , становится неустойчивой с отрицательным мультипликатором.

Если $q = \frac{1}{1+e^{\lambda}}$, т.е. $q = q_{flip0}$, то

$$x_1^{\mathcal{LM}} = \frac{e^{\lambda}}{1+e^{\lambda}} = c_{\mathcal{L}}, \quad x_2^{\mathcal{LM}} = \frac{1}{1+e^{\lambda}} = c_{\mathcal{R}}$$

Утверждение 1 доказано.

При увеличении параметра q устойчивый 2-цикл $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}$ претерпевает вырожденную бифуркацию удвоения периода (рис. 7). Бифуркационное значение параметра q находится из условия

$$\rho(\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}) = \frac{e^{2\lambda}q}{q-1} = -1.$$

Отсюда

$$q_{flip1} = \frac{1}{1+e^{2\lambda}} \approx 0,73298496059.$$

В результате этого рождается четырехполосный хаотический аттрактор [22, 26], а 2-цикл $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}$ становится неустойчивым ($\rho(\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}) < -1$).

Из рис. 7 видно, что при $q = q_{flip1}$ одна точка 4-цикла лежит на правой границе $c_{\mathcal{R}}$

$$F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}}) = c_{\mathcal{R}} = \frac{1}{1+e^{2\lambda}},$$

а другая точка – на левой границе $c_{\mathcal{L}}$.

Более того, при $q = q_{flip1}$

$$c_3 = c_{\mathcal{L}}$$

где $c_3 = F_{\mathcal{M}} \circ F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{R}}(q)$.

$$\text{Здесь } q = \frac{1}{1+e^{2\lambda}}.$$

$$\text{Отсюда } c_3 = \frac{1-e^{\lambda}+e^{2\lambda}}{1+e^{2\lambda}}.$$

Убеждаемся, что c_3 равно $c_{\mathcal{L}}$

$$c_{\mathcal{L}} = \frac{q-1}{e^{\lambda}} + 1 = \frac{1-e^{\lambda}+e^{2\lambda}}{1+e^{2\lambda}}.$$

На рис. 8 (а) – (в) показаны осциллограммы колебаний напряжения нагрузки, отвечающие 1-, 2-циклам и хаотическому режиму.

Границы четырехполосного хаотического аттрактора образованы критической точкой ранга один $c_0 = F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}}) = q$ и ее образами $c_1 = F_{\mathcal{R}}(c_0)$, $c_2 = F_{\mathcal{L}}(c_1)$, $c_3 = F_{\mathcal{M}}(c_2)$, $c_4 = F_{\mathcal{L}}(c_3)$, $c_5 = F_{\mathcal{M}}(c_4)$, $c_6 = F_{\mathcal{L}}(c_5)$, $c_7 = F_{\mathcal{M}}(c_6)$ (рис. 5). На рис. 9 (а) показан четырехполосный хаотический аттрактор:

$$B_1 = F(B_0), B_2 = F(B_1), B_3 = F(B_2), B_0 = F(B_3),$$

где [22, 28].

$$B_0 = [c_7, c_3], B_1 = [c_4, c_0], B_2 = [c_1, c_5], B_3 = [c_2, c_6].$$

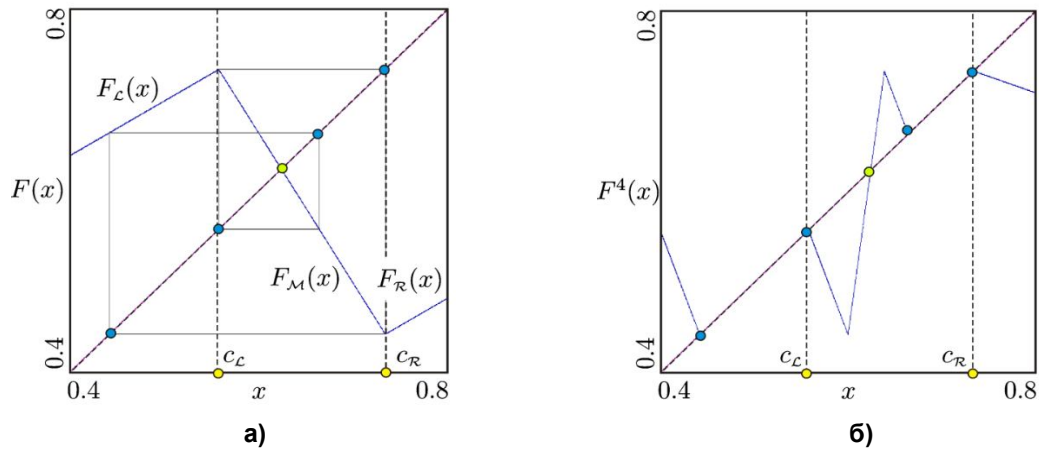


Рис. 7. Бифуркация удвоения периода 2-цикла $\mathcal{O}_{LM}$. а – $F(x)$. б – $F^4(x)$

Fig. 7. Flip bifurcation for $\mathcal{O}_{LM}$. а – $F(x)$. б – $F^4(x)$

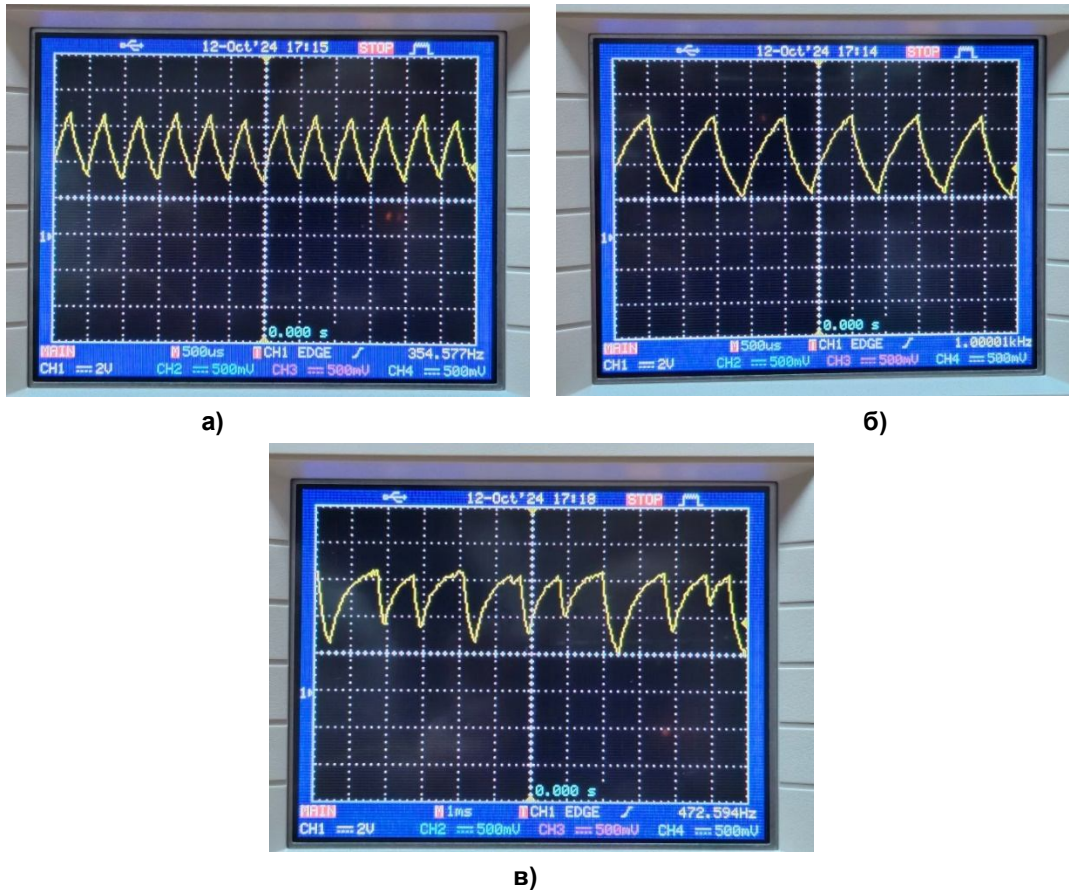


Рис. 8. Экспериментальные диаграммы напряжения нагрузки $V_{load} = Ri$: а – неподвижная точка $\mathcal{O}_M$

отображения (8), отвечающая периодическим колебаниям V_{load} с периодом внешнего воздействия; б – цикл $\mathcal{O}_{LM}$ периода 2, который возникает из неподвижной точки через бифуркацию удвоения периода; в – хаотические колебания

Fig. 8. Experimental waveforms of a load voltage $V_{load} = Ri$. а – Fixed point $\mathcal{O}_M$ of the map (8),

corresponding to periodic oscillations V_{load} with a forced periodic action; б – Period two cycle $\mathcal{O}_{LM}$, arising in a flip bifurcation for a fixed point; в – Chaotic oscillations

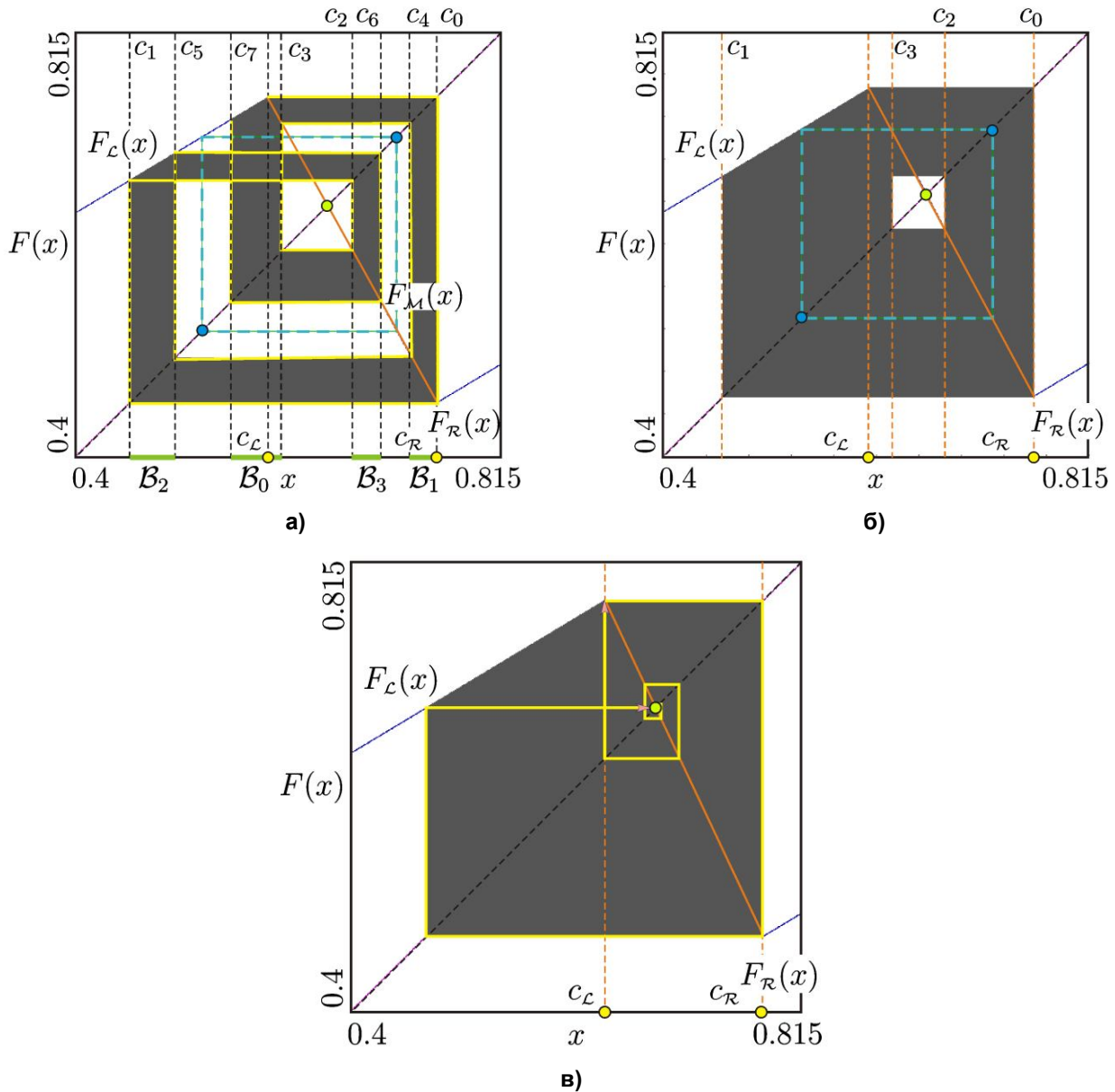


Рис. 9. Четырех-, двух- и однополосный хаотические аттракторы

Fig. 9. Four-, two- and single-band chaotic attractors

В точке $q=q_{H2}$ неустойчивый 2-цикл $\mathcal{O}_{LM}$ с отрицательным мультипликатором (рис. 5) сталкивается с границами c_4 , c_6 и c_5 , c_7 .

Бифуркационное значение параметра q находилось из условия, когда критическая точка $c_4=F_L(c_3)$ или $c_6=F_L(c_5)$ сливается в точке бифуркации с неустойчивым циклом $\mathcal{O}_{LM}$ периода 2.

Это условие дает квадратное уравнение:

$$(e^{2\lambda} - e^{3\lambda})q^2 + (1 - e^\lambda)q - 1 + e^\lambda = 0. (11)$$

Положительное решение (11) есть бифуркационное значение q_{H2} параметра q , при котором возникает двухполосный хаотический аттрактор (см. рис. 9 (б), $q=q_{H2} \approx 0,7591261579$).

При дальнейшем увеличении q двухполосный хаотический аттрактор переходит в однополосный (рис. 9 (в)), когда в точке $q=q_{H1}$ полосы хаотического аттрактора, определяемые границами c_2 и c_3 сливаются с неустойчивой неподвижной точкой $\mathcal{O}_M$ ($\rho(\mathcal{O}_M) < -1$). Бифуркационное значение параметра удовлетворяет уравнению

$$e^{2\lambda} q^2 + q - 1 = 0. \quad (12)$$

Учитывая, что значение q может быть только положительным, получим $q = q_{H1} \approx 0,77899956274$.

Мы ограничились изучением бифуркаций слияния («merging») циклов хаотических интервалов. При больших значениях q наблюдается каскад бифуркаций расширения («expansion»). Исследование таких переходов является предметом другой статьи (см. также [4, 22]).

Выводы

В данной статье представлены результаты бифуркационного анализа системы управления с широтно-импульсной модуляцией второго рода с бесконечным коэффициентом усиления цепи обратной связи, поведение которой описывается кусочно-линейным отображением.

Статья является продолжением работы [4]. В отличие от [4] введена дискретная математическая модель, допускающая детальный численно-аналитический бифуркационный анализ. Такая модель сохраняет главное свойство кусочно-линейного отображения, которое доказано в [4].

Выполнен анализ вырожденных бифуркаций удвоения периода. Показано, что рассматриваемое отображение обладает и другим свойством, которое заключается в следующем. В точке бифуркации удвоения периода неподвижной точки появляется интервал I , на границах которого лежат две точки цикла удвоенного периода. Причем, любая точка I есть периодическая точка с периодом два. Доказано, что точки цикла удвоенного периода, лежащие на границе I , совпадают с двумя многообразиями переключения.

В качестве конкретного примера реальной физической системы, изучение которой сводится к кусочно-линейному отображению с таким свойством, рассмотрен преобразователь энергии с широтно-импульсным управлением. Приведены осциллограммы колебаний напряжения нагрузки, отвечающие неподвижной точке, циклу периода два и хаотическим режимам.

Изучены бифуркации слияния циклов хаотических интервалов. Такие бифуркации известны еще как кризисы хаотических аттракторов («merging crisis»). В точке бифуркации неустойчивая неподвижная точка с отрицательным мультипликатором сталкивается с границами хаотических аттракторов. Границы же хаотических аттракторов образованы так называемыми критическими точками и их образами. В момент бифуркации возникает негрубая гомоклиническая орбита. В силу того, что отображение является кусочно-линейным, уравнения бифуркационных границ получены аналитически.

Список литературы

1. Кунцевич В.М., Чеховой Ю.Н. Нелинейные системы управления с частотно- и широтно-импульсной модуляцией. Киев, 1982.
2. Gelig A. Kh., Churilov A. N. Stability and oscillations of nonlinear pulse-modulated systems. Boston: Birkhauser, 1998.
3. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
4. On border-collision bifurcations in a pulse system / Zh.T. Zhusubaliyev, D.V. Titov, O.O. Yanochkina, U.A. Sopuev // Automation and Remote Control. 2024. Vol. 85(2). P. 103-122. DOI:10.31857/S0005117924020025
5. О бифуркациях хаотических аттракторов в широтно-импульсной системе управления / Ж.Т. Жусубалиев, У.А. Сопуев, Д.А. Бушуев, А.С. Кучеров, А.З. Абдира-сулов // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. проц. упр. 2024. Т. 20(1). С. 62-78. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.106>
6. Кипнис М.М. Хаотические явления в детерминированной одномерной широтно-импульсной системе управления // Техническая кибернетика. 1992. №1. С. 108-112.
7. Chaotic Dynamic in Two-Dimensional Noninvertible Maps / C. Mira, L. Gardini, A. Barugola, J.C. Cathala. Singapore: World Scientific, 1996.
8. Nusse H.E., Yorke J.A. Border-collision bifurcations including «period two to period three» for piecewise smooth system // Physica D. 1992. Vol. 57, no. 1-2. P. 39-57. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(92\)90087-4](https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90087-4)
9. Feigin M.I. Doubling of the oscillation period with C-bifurcations in piecewise continuous systems // Journal of Appl. Math. 1970. Vol. 34(5-6). P. 822-830. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(70\)90064-X](https://doi.org/10.1016/0021-8928(70)90064-X)
10. Фейгин М.И. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. М.: Наука, 1994.
11. Local analysis of C-bifurcation in n-dimensional piecewise-smooth dynamical system / M. Di Bernardo, M.I. Feigin, S.J. Hogan, M.E. Homer // Chaos, Solitons and Fractals/ 1999. Vol. 19, № 11. P. 1881-1908. [https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(98\)00317-8](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(98)00317-8)
12. Banerjee S., Verghese C.C. (eds.) Nonlinear Phenomena in Power Electronis. New York: IEEE Press, 2001.
13. Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E. Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. Singapore: World Scientific, 2003.
14. Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications / M. Di Bernardo, C.J. Budd, A.R. Champneys, P. Kowalczyk. London: Springer-Verlag, 2008.
15. Bifurcations in nonsmooth dynamical systems / M. Di Bernardo, C.J. Budd, P. Kowalczyk, A.B. Nordmark, G.O. Tost, P.T. Piironen // SIAM Review. 2008. Vol. 50. P. 629-701. <https://doi.org/10.1137/050625060>
16. Simpson D.J.W. Border-collision bifurcations in R^N // SIAM Review. 2016. Vol. 58. P. 177-226. <https://doi.org/10.1137/15M1006982>

17. Bifurcations of chaotic attractors in one-dimensional maps / V. Avrutin, L. Gardini, M. Schanz, I. Sushko // *Int. J. Bifurcations and Chaos*. 2014. Vol. 24. P. 1440012. <https://doi.org/10.1137/15M1006982>
18. Border collision bifurcation of a resonant closed invariant curve / Zh.T. Zhusubaliyev, V. Avrutin, I. Sushko L. Gardini // *Chaos*. 2022. Vol. 32. P. 043101. <https://doi.org/10.1063/5.0086419>
19. Kuznetsov Yu. A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. New York: Springer-Verlag, 2004.
20. Guckenheimer J., Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag: New York, 2013.
21. Sushko I., Gardini L. Degenerate bifurcations and border collisions in piecewise smooth 1A and 2D maps // *Int. J. Bifurcations and Chaos*. 2010. Vol. 20, no. 7. P. 2014-2070. <https://doi.org/10.1142/S0218127410026927>
22. Continuous and Discontinuous Piecewise-Smooth One-Dimensional Maps: Invariant Sets and Bifurcation Structures. / V. Avrutin, L. Gardini, I. Sushko, F. Tramontana. Singapore: World Scientific, 2019.
23. Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. Chaotic attractors in crisis // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 48. P. 1507-1510. DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.48.1507>
24. Rasliid M.H. *Power Electronics Handbook*. Butterworth-Heinemann, 2018.
25. Blaabjerg F. *Control of Power Electronic Converters and Systems*. Academic Press, 2021.
26. Avrutin V., Eckstein E., Schanz M. On detection of multi-band chaotic attractors // *Proceedings of Royal Society A*. 2007. Vol. 463. P. 1339-1358. <https://doi.org/10.1098/rspa.2007.1826>

References

1. Kuntsevich V.M., Chekhovoi Yu.N. *Nonlinear systems with frequency and pulse-width modulations*. Kiev; 1982. (In Russ.).
2. Gelig A. Kh., Churilov A. N. *Stability and oscillations of nonlinear pulse-modulated systems*. Boston: Birkhauser; 1998.
3. Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoi chast'yu*. Moscow: Nauka; 1985. (In Russ.).
4. Zhusubaliyev Zh.T., Titov D.V., Yanochkina O.O., Sopuev U.A. On border-collision bifurcations in a pulse system. *Automation and Remote Control*. 2024; 85(2): 103-122. DOI:10.31857/S0005117924020025
5. Zhusubaliyev Zh. T., Sopuev U. A., Bushuev D. A., Kuchеров A. S., Abdirasulov A. Z. On bifurcations of chaotic attractors in a pulse width modulated control system. *Vestn. S.-Peterburg. un-ta. Ser. 10. Prikl. matem. Inform. prots. upr. = Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2024; 20(1): 62–78. (In Russ.). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2024.106>
6. Kipnis M. M. Chaotic phenomena in a deterministic one- dimensional pulse-width modulated control system. *Tekhnicheskaya kibernetika = Technical kibernetics*. 1992; (1): 108–112. (In Russ.).

7. Mira C., Gardini L., Barugola A., Cathala J.C. Chaotic Dynamic in Two-Dimensional Noninvertible Maps. Singapore: World Scientific; 1996.
8. Nusse H.E., Yorke J.A. Border-collision bifurcations including «period two to period three» for piecewise smooth system. *Physica D*. 1992; 57 (1-2): 39-57. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(92\)90087-4](https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90087-4)
9. Feigin M.I. Doubling of the oscillation period with C-bifurcations in piecewise continuous systems. *Journal of Appl. Math.* 1970; 34(5-6): 822-830. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(70\)90064-X](https://doi.org/10.1016/0021-8928(70)90064-X)
10. Feigin M.I. Forced oscillations of systems with discontinuous nonlinearities. Moscow: Nauka; 1994. (In Rus.).
11. Di Bernardo M., Feigin M.I., Hogan S.J., Homer M.E. Local analysis of C-bifurcation in n-dimensional piecewise-smooth dynamical system. *Chaos, Solitons and Fractals*. 1999; 19 (11): 1881-1908. [https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(98\)00317-8](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(98)00317-8)
12. Banerjee S., Verghese C.C. (eds.) Nonlinear Phenomena in Power Electronics. New York: IEEE Press; 2001.
13. Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E. Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. Singapore: World Scientific; 2003.
14. Di Bernardo M., Budd C.J., Champneys A.R., Kowalczyk P. Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications. London: Springer-Verlag; 2008.
15. Di Bernardo M., Budd C.J., Kowalczyk P., Nordmark A.B. Tost G.O., Piiroinen P.T. Bifurcations in nonsmooth dynamical systems. *SIAM Review*. 2008; 50: 629-701. <https://doi.org/10.1137/050625060>
16. Simpson D.J.W. Border-collision bifurcations in RN. *SIAM Review*. 2016; 58: 177-226. <https://doi.org/10.1137/15M1006982>
17. Avrutin V., Gardini L., Schanz M., Sushko I. Bifurcations of chaotic attractors in one-dimensional maps. *Int. J. Bifurcations and Chaos*. 2014; 24: 1440012. <https://doi.org/10.1137/15M1006982>
18. Zhusubaliyev Zh.T., Avrutin V., Sushko I., Gardini L. Border collision bifurcation of a resonant closed invariant curve. *Chaos*. 2022; 32: 043101. <https://doi.org/10.1063/5.0086419>
19. Kuznetsov Yu. A. Elements of Applied Bifurcation Theory. New York: Springer-Verlag; 2004.
20. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. New York: Springer-Verlag; 2013.
21. Sushko I., Gardini L. Degenerate bifurcations and border collisions in piecewise smooth 1A and 2D maps. *Int. J. Bifurcations and Chaos*. 2010; 20(7): 2014-2070. <https://doi.org/10.1142/S0218127410026927>
22. Avrutin V., Gardini L., Sushko I., Tramontana F. Continuous and Discontinuous Piecewise-Smooth One-Dimensional Maps: Invariant Sets and Bifurcation Structures. Singapore: World Scientific; 2019.
23. Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. Chaotic attractors in crisis. *Phys. Rev. Lett.* 1982; 48: 1507-1510. DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.48.1507>

24. Rasliid M.H. Power Electronics Handbook. Batterworth-Heinmann; 2018.
25. Blaabjery F. Control of Power Electronic Converters and Systems. Academic Press; 2021.
26. Avrutin V., Ecketein E., Schanz M. On detection of multi-band chaotic attractors. *Proceedings of Royal Society A*. 2007; 463: 1339-1358. <https://doi.org/10.1098/rspa.2007.1826>

Информация об авторах / Information about the Authors

Жусубалиев Жаныбай Турсунбаевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной техники, руководитель Международной научной лаборатории динамики негладких систем, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская Федерация, e-mail: zhanybai@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-3117-5595>

Zhanybai T. Zhusubaliyev, Dr. of Sci. (Engineering), Professor, Professor of Computer Engineering Department, Head of the International Scientific Laboratory of Dynamics of Nonsmooth Systems of Space, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: zhanybai@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-3117-5595>

Иванова Елена Николаевна, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры вычислительной техники, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская Федерация, e-mail: verksel@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-4466-5928>

Elena N. Ivanova, Cand. of Sci. (Engineering), Associate Professor, Associate Professor of Computer Engineering Department, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: verksel@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-4466-5928>

Сопуев Уланбек Адахимжанович, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики, физики, техники и информационных технологий, заведующий кафедрой высшей математики, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, e-mail: ulansopuev@mail.ru

Ulanbek A. Sopuev, Cand. of Sci. (Physico-Mathematical), Associate Professor, Institute of Mathematics, Physics, Engineering and Information Technology, Head of Higher Mathematics Department, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, e-mail: ulansopuev@mail.ru

Жумашева Жадира Токановна, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры механики, Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан, e-mail: Zhadyra_14@mail.ru

Zhadira T. Zhumasheva, Cand. of Sci. (Engineering), Associate Professor, Associate Professor of Mechanics Department, al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: Zhadyra_14@mail.ru

Цуканов Дмитрий Юрьевич, студент, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская Федерация, e-mail: dmitrtsukanov@yandex.ru

Dmitriy Yu. Tsukanov, Student, Southwest State University, Kursk, Russian Federation, e-mail: dmitrtsukanov@yandex.ru