СТРОИТЕЛЬСТВО

CONSTRUCTION

Оригинальная статья / Original article

УДК 697.7

https://doi.org/10.21869/2223-1560-2024-28-4-21-39

Измерительно-полиномиальная обработка входных данных вычислительной системы

А. П. Локтионов [1] ✉

[1] Юго-Западный государственный университет
ул. 50 лет Октября, д. 94, г. Курск 305040, Российская Федерация

✉ e-mail: loapa@mail.ru

Резюме

Цель исследования. *Цель данного исследования – построение узлов сетки аппроксимации в измерительно-полиномиальной обработке входных данных вычислительной системы в коэффициентной обратной задаче для алгебраического многочлена, в том числе для уравнения прогибов балки при решении обратной задачи Коши.*

Методы. *Основными научными методами, применяемыми в рамках данного исследования, являются методы регуляризации, редукции измерений, линейной лагранжевой аппроксимации, численные методы. Поскольку при выводе явных формул в радикалах корней разрешающих уравнений оптимального плана узлов сетки аппроксимации по теореме Абеля на степень уравнений накладывается ограничение, в данной статье в решении задачи для алгебраического многочлена с предписанным коэффициентом второго младшего члена предложено использовать чебышёвский альтернанс экстремальных полиномов.*

Результаты. *Результатом исследования является методика оптимизации сетки аппроксимации в решении коэффициентной задачи алгебраического многочлена, которая минимизирует влияние погрешности входных данных с равномерной непрерывной нормой абсолютной погрешности на точность решения задачи путем минимизации функции Лебега. Также результатом является определение модификации многочленов Чебышёва первого рода, имеющей на замкнутом интервале [–1, 1] свойства: n–1 нулей, n-точечный чебышёвский альтернанс, значение $(-1)^{n-1}$ в точке с координатой (–1). Обосновано предложение о приведении чебышёвского альтернанса к оптимальной сетке аппроксимации при решении коэффициентной задачи алгебраического многочлена. Приведены примеры чебышёвского альтернанса второго – пятого порядка.*

Заключение. *В данной статье предложена формализация задачи минимизации влияния погрешности входных данных на точность вычисления коэффициентов алгебраического многочлена в измерительно-вычислительной системе посредством выбора узлов сетки аппроксимации через чебышёвский альтернанс.*

Ключевые слова: *коэффициентная обратная задача; обработка данных; обратная задача Коши; модификация многочлена Чебышёва; консольная балка.*

Конфликт интересов: *Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.*

Для цитирования: Локтионов А. П. Измерительно-полиномиальная обработка входных данных вычислительной системы // Известия Юго-Западного государственного университета. 2024. Т. 28, №4. С. 21-39. https://doi.org/10.21869/ 2223-1560-2024-28-4-21-39.

Поступила в редакцию 02.10.2024 *Подписана в печать 30.10.2024* *Опубликована 10.12.2024*

Measuring-polynomial processing of input data of a computer system

Askold P. Loktionov [1] ✉

[1] Southwest State University
50 Let Oktyabrya str. 94, Kursk 305040, Russian Federation

✉ e-mail: loapa@mail.ru

Abstract

Purpose of research. *The purpose of this study is to construct approximation grid nodes in the measurement-polynomial processing of input data of a computer system in the coefficient inverse problem for an algebraic polynomial, including for the equation of beam deflections when solving the inverse Cauchy problem.*

Methods. *The main scientific methods used in this study are methods of regularization, measurement reduction, linear Lagrangian approximation, and numerical methods. Since when deriving explicit formulas in the radicals of the roots of the resolving equations for the optimal design of the approximation grid nodes according to Abel's theorem, a limitation is imposed on the degree of the equations, in this article, in solving the problem for an algebraic polynomial with a prescribed coefficient of the second lowest term, it is proposed to use the Chebyshev alternance of extremal polynomials.*

Results. *The result of the study is a technique for optimizing the approximation grid, minimizing the influence of the input data error with a uniform continuous norm of absolute errors on the accuracy of solving the problem by minimizing the Lebesgue function. The proposal to apply a modification of Chebyshev polynomials to the optimal approximation grid is substantiated.*

Conclusion. *This article proposes a formalization of the problem of minimizing the influence of the input data error on the accuracy of calculating the coefficients of an algebraic polynomial in a measurement and computing system by selecting the nodes of the approximation grid through the Chebyshev alternance.*

***Keywords**: coefficient inverse problem; data processing; inverse Cauchy problem; modification of Chebyshev polynomial; cantilever beam.*

Conflict of interest. *The authors declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.*

For citation: Loktionov A. P. Measuring-polynomial processing of input data of a computer system. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta = Proceedings of the Southwest State University.* 2024; 28(4): 21-39 (In Russ.). https://doi.org/10.21869/2223-1560-2024-28-4-21-39.

Received 02.10.2024 *Accepted 30.10.2024* *Published 10.12.2024*

***

Введение

Коэффициентная обратная задача для алгебраических многочленов относится к обратным задачам математической физики, механики [1; 2; 3; 4; 5]. Ограниченость массива измерений определяет дискретную форму обратной задачи, в качестве параметра регуляризации может быть использована характеристика распределения узлов сетки аппроксимации [6; 7]. Малая погрешность зашумленных входных данных – значений исследуемого многочлена, получаемых экспериментально или расчетом на ЭВМ, может вызвать большое возмущение решения [8; 9]. Здесь эффективен интервальный анализ и его специфичные методы, которые имеют большую ценность в задачах, где неопределённости и неоднозначности возникают с самого начала, будучи неотъемлемой частью постановки задачи [10; 11].

При обработке входных данных чаще всего ищут наилучшее приближение в нормах C или L_2. Приближение в норме L_2 сглаживает неточности входных данных. Эффективность среднеквадратичного приближения снижается при малой величине массива экспериментальных входных данных. Если распределение погрешности (шумов) отличается от нормального распределения, то среднеквадратичное приближение теряет свое вероятностное обоснование [9; 12]. Выбор метрики, как правило, определяется характером эксперимента.

В исследованиях показателей качества обработки входных данных и алгоритмов решения обратных задач предлагается использовать функции и константы Лебега [4; 5; 6; 7; 12; 13; 14].

Выбор оптимальных узлов сетки аппроксимации впервые исследовал С. Н. Бернштейн в 1952 году [15], формирование отдельных направлений проблемы С. Н. Бернштейна является новым этапом в развитии обратных задач. Узлами сетки аппроксимации могут быть нули многочлена Чебышёва первого рода [8; 16]. Исследовалось добавление к этим узлам крайних точек заданного интервала [8; 17]. Также исследовалась связь сетки аппроксимации с чебышёвским альтернансом [18; 19], в том числе направление, основанное Е. И. Золотаревым [20], по решению коэффициентных обратных задач для алгебраических многочленов с частично заданными коэффициентами. Последнее направление интенсивно развивается, например, в работах [21; 22; 23; 24; 25; 26; 27; 28].

Коэффициенты алгебраических многочленов образуют конечные последовательности, которые могут быть связаны с элементами строк матриц Риордана [29]. Исследование производящих функций матриц Риордана в семействе ортогональных многочленов в работе [30] расширило область применения полиномов Чебышёва и их модификаций [31; 32; 33; 34].

Цель данной статьи – разработка методики построения сетки аппроксимации через чебышёвский альтернанс модификаций экстремальных многочленов Чебышёва в измерительно-полиномиальной обработке входных данных вычислительной системы в коэффициентной обратной задаче для алгебраических многочленов с предписанным коэффициентом второго младшего члена, в том числе в обратной задаче Коши.

Материалы и методы

Модель с линейной лагранжевой аппроксимацией коэффициентной обратной задачи для алгебраического многочлена.

Пусть n – некоторое натуральное число. В продолжение работ [28; 34] рассмотрим восстановление коэффициентов алгебраического многочлена степени $n \geq 2$

$$P_n(a,x) = \sum_{r=0}^{n} a_{n,r} x^{n-r},\ a_{n,0} \neq 0. \qquad (1)$$

В частности, рассмотрим обратную задачу Коши для поперечного изгиба консольной балки постоянного сечения с вычислением коэффициентов d_r уравнения прогибов балки

$$v(d,x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{d_r}{r!} x^r,\ d_n \neq 0 \qquad (2)$$

– алгебраического многочлена, сходного с многочленом (1) [28].

Входные данные $P^*(a,x_i), i \in (1,\ldots,n)$ многочлена (1) на интервале [0, l] заданы на сетке аппроксимации

$$0 \leq x_1 < x_2 < \ \ldots < x_{n-1} < x_n \leq l. \qquad (3)$$

В исследуемой задаче вычисляются коэффициенты $a^*_{n,r}$ алгебраического многочлена

$$P^*_n(a,x) = a_{n,n-1}x + \sum_{\substack{r=0 \\ r\neq n-1}}^{n} a^*_{n,r} x^{n-r}, \qquad (4)$$

приближенного к многочлену (1) с заданным (предписанным) коэффициентом $a_{n,n-1}$ второго младшего члена.

Математическая модель коэффициентной обратной задачи – уравнения (1), (4), сетка аппроксимации (3) и уравнения:

$$a^*_{n,r} = \sum_{i=1}^{n} l_{n,r,i}\left[P^*_n(a,x_i) - a_{n,n-1}x_i\right],\quad r \in (0,2,\ldots,n) \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_{n,r,i} x_i^j = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq n-r \\ 1 & \text{при } j = n-r \end{cases},\quad j = 0:n-2,n,\ \ r \in (0,2,\ldots,n) \qquad (6)$$

$$R[P_n(a,x_i)] = P^*_n(a,x_i) - P_n(a,x_i), \qquad (7)$$

$$\left\|\Delta P_n(a,x_i)\right\| = \Delta_{\max}\left[P_n(a,x_i)\right] \geq \geq \Delta P_n(a,x_i) = \left|R\left[P_n(a,x_i)\right]\right|, \qquad (8)$$

$$\Delta a_{n,r} = \sum_{i=1}^{n} l_{n,r,i} \Delta P_n(a,x_i), \qquad (9)$$

$$\Delta_{\max}\left[a_{n,r}\right] \leq \leq \alpha_{n,r}(X)\cdot \sup\Delta_{\max}\left[P(a,x_i)\right], \qquad (10)$$

$$L_{n,r}(X) = \sum_{i=1}^{n}\left|l_{n,r,i}\right|,\quad X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \qquad (11)$$

$$\Lambda_{n,r,s} = \min \sum_{i=1}^{n}\left|l_{n,r,i}\right|, \qquad (12)$$

$$\alpha_{n,r}(X) = L_{n,r}(X) \to \min. \qquad (13)$$

Значения коэффициентов $a^*_{n,r} \approx a_{n,r}$ вычисляются приближением с использованием линейной лагранжевой аппроксимации (5) в методе неопределенных коэффициентов. Формулы множителей Лагранжа $l_{n,r,i}$ получаются решением системы уравнений (6).

Входные данные $P^*(a,\ x_i)$ характеризуем погрешностью (7) с учетом апостериорно-интервального анализа [10; 11].

В задаче приближения при небольшом массиве входных данных и равномерной непрерывной норме абсолютной погрешности (8) суммарная абсолютная погрешность по всем узлам сетки вычисляется по формуле (9).

Для оценки погрешности коэффициентов $a_{n,r}$ и эффективности решения задачи используем абсолютное число обусловленности задачи $\alpha_{n,r}(X)$ в неравенстве (10). $\Delta_{\max}[a_{n,r}(X)]$ – верхняя граница абсолютной погрешности решения. $\Delta_{\max}[P_n(a,\ x_i)]$ – верхняя граница абсолютной погрешности многочлена (1) в узлах сетки аппроксимации (3). В соответствии с формулами (5), …, (10) абсолютное число обусловленности задачи $\alpha_{n,r}(X)$ равно значению функции Лебега (сетки) (11).

Для минимизации влияния погрешности входных данных на качество приближения используем специально сконструированную редукцией измерений структуру сетки (3). Для этого вводим целевой параметр – константу Лебега второго рода $\Lambda_{n,r,s}$ [1] (12). Считая абсолютное число обусловленности задачи $\alpha_{n,r}(X)$ целевой функцией, решаем задачу минимизации числа обусловленности, получения целевого параметра (12) по условию (13).

Специально сконструированные узлы сетки (3) получаются решением задачи (13). Задача может быть реализована прямым аналитическим методом разыскания частных производных функции Лебега (11) по переменным x_i на точечном множестве X с учетом формул множителей Лагранжа $l_{n,r,i}$ с последующим получением безусловного экстремума (минимума) и оптимального плана узлов сетки аппроксимации.

Формула (12) реализуется дифференцированием функции (11). С увеличением значений n и r теорема Абеля накладывает ограничение на степень уравнения. Следует исследовать альтернанс модификации полинома Чебышёва первого рода.

Пусть n – некоторое натуральное число. Для конечной последовательности z_0, z_1, …, z_n рассмотрим производящую функцию – алгебраический многочлен степени $n \geq 2$:

$$L_n\left(z,u\right)=\sum_{r=0}^{n} z_r u^r . \qquad (14)$$

Поставим задачу реализовать свойства многочлена (14) на замкнутом интервале [–1, 1] (а) наименьшее уклонение от нуля, наличие n–1 нулей, (б) значение $(-1)^{n-1}$ в точке с координатой (–1), (в) функциональная связь с многочленом Чебышёва первого рода, который на замкнутом интервале [–1, 1] допускает представление

$$T_n(\ )=\cos\left(n\arccos\tau\right), \qquad (15)$$

(г) чебышёвский альтернанс, (д) функциональная связь точек альтернанса с оптимальным планом координат узлов сетки аппроксимации (3).

Результаты и их обсуждение

Линейная лагранжева аппроксимация

Результаты вывода формул множителей Лагранжа $l_{n,r,i}$ при $n \in (2, 3, 4)$, $r \in (2, 3, 4)$ в уравнении (9) показаны в табл. 1. Видно, что при $n \geq 3$ в формулы входят многочлены пятой и более степени.

[1] s – первая буква слова second

Таблица 1. Формулы множителей Лагранжа $l_{n,r,i}$

Table 1. Formulas of Lagrange multipliers $l_{n,r,i}$

n	r	i	Множители Лагранжа $l_{n,r,i}$ / Lagrange multipliers $l_{n,r,i}$	Вспомогательные переменные / Auxiliary variables
2	2	1	$1/\left(x_1^2-x_2^2\right)$	
		2	$1/\left(x_2^2-x_1^2\right)$	
3	2	1	$\left(x_2^3-x_3^3\right)/\gamma_1$	
		2	$\left(x_3^3-x_1^3\right)/\gamma_1$	
		3	$\left(x_1^3-x_2^3\right)/\gamma_1$	
	3	1	$\left(x_3^2-x_2^2\right)/\gamma_1$	
		2	$\left(x_1^2-x_3^2\right)/\gamma_1$	
		3	$\left(x_2^2-x_1^2\right)/\gamma_1$	$\gamma_1=\left(x_1-x_2\right)\left(x_1-x_3\right)\left(x_3-x_2\right)\times$ $\times(x_1x_2+x_1x_3+x_3x_2),$ $\gamma_2=\left(x_3^4-x_4^4\right)\left(x_2^3-x_4^3\right)-\left(x_3^3-x_4^3\right)\left(x_2^4-x_4^4\right),$ $\gamma_3=\gamma_4\gamma_6-\gamma_5\gamma_7,$ $\gamma_4=\left(x_1^3-x_4^3\right)\left(x_3^2-x_4^2\right)-\left(x_1^2-x_4^2\right)\left(x_3^3-x_4^3\right),$ $\gamma_5=\left(x_2^3-x_4^3\right)\left(x_3^2-x_4^2\right)-\left(x_2^2-x_4^2\right)\left(x_3^3-x_4^3\right),$ $\gamma_6=\left(x_2^4-x_4^4\right)\left(x_3^2-x_4^2\right)-\left(x_2^2-x_4^2\right)\left(x_3^4-x_4^4\right),$ $\gamma_7=\left(x_1^4-x_4^4\right)\left(x_3^2-x_4^2\right)-\left(x_3^4-x_4^4\right)\left(x_1^2-x_4^2\right),$ $\gamma_8=\left(x_1^2-x_4^2\right)\left(x_2^4-x_4^4\right)-\left(x_2^2-x_4^2\right)\left(x_1^4-x_4^4\right)$
4	2	1	$\left(x_3^2-x_4^2\right)\gamma_2/\gamma_3$	
		2	$\left(x_4^3-x_3^3-l_{4,2,1}\gamma_4\right)/\gamma_5$	
		3	$\dfrac{1-\left(x_1^2-x_4^2\right)l_{4,2,1}-\left(x_2^2-x_4^2\right)l_{4,2,2}}{x_3^2-x_4^2}$	
		4	$-l_{4,2,1}-l_{4,2,2}-l_{4,2,3}$	
	3	1	$\left(x_3^2-x_4^2\right)\gamma_6/\gamma_3$	
		2	$\left(x_4^2-x_3^2\right)\gamma_7/\gamma_3$	
		3	$\left(x_4^2-x_3^2\right)\gamma_8/\gamma_3$	
		4	$-l_{4,3,1}-l_{4,3,2}-l_{4,3,3}$	
	4	1	$\left(x_4^2-x_3^2\right)\gamma_5/\gamma_3$	
		2	$\left(x_4^2-x_3^2\right)\gamma_4/\gamma_3$	
		3	$\dfrac{\left(x_1^2-x_4^2\right)l_{4,4,1}+\left(x_2^2-x_4^2\right)l_{4,4,2}}{x_4^2-x_3^2}$	
		4	$-l_{4,4,1}-l_{4,4,2}-l_{4,4,3}$	

Результаты вывода формул функции Лебега при $n \in (2, 3)$ представлены в табл. 2. С увеличением степени n многочлена (1) функция Лебега усложняется.

Числитель функция Лебега при $n \geq 5$ – функция степени более 8. Знаменатель функция Лебега при $n \geq 5$ – функция степени более 10.

Результаты решения задачи (13) для безразмерных координат $x_{i,d} = x_i/l$ [1] при $n = 2$, 3 получены в виде рациональных выражений ($x_{1,d} = 0$, $x_{n,d} = 1$), а при $n = 4$ в радикалах (табл. 3). Эти результаты совпадают с оптимальными сетками аппроксимации для алгебраического многочлена (2) [28]. На стадии исследования линейной лагранжевой аппроксимации в соответствии с теоремой Абеля координаты $x_{5,i,d}$ получены численным методом, а формулы в табл. 2 получены далее (по теореме 2).

Таблица 2. Формулы функций Лебега

Table 2. Lebesgue function formulas

n	r	Функции Лебега / Lebesgue function
2	2	$2\big/\left(x_2^2 - x_1^2\right)$
3	2	$2\dfrac{x_1^3 + x_1x_3 + x_3^2}{\left(x_2 - x_1\right)\left(x_3 - x_2\right)\left(x_1x_2 + x_1x_3 + x_3x_2\right)}$
	3	$2\dfrac{x_1 + x_3}{\left(x_2 - x_1\right)\left(x_3 - x_2\right)\left(x_1x_2 + x_1x_3 + x_3x_2\right)}$

Таблица 3. Оптимальные координаты узлов сетки аппроксимации

Table 3. Optimal coordinates of approximation grid nodes

n	3	4		5		
i	2	\`2	3	1	2	3
Формулы координат в радикалах / Formulas for coordinates in radicals	$\dfrac{2}{3}$	$-1+\sqrt{2}$	$-2+2\sqrt{2}$	$\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{10}$	$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}$	$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$
Численные значения координат / Numerical values of coordinates	0,6667	0,4142	0,8284	0,2764	0,6180	0,8944

[1] d – первая буква слова dimensionless

Отклонение координат узлов сетки аппроксимации от оптимальных значений увеличивает безразмерное абсолютное число обусловленности $A_{n,r} = l^r \alpha_{n,r}(X)$ (рис. 1). У многочлена (1) при $n = 4$, $r = 2$ отклонение координаты x_i до половины текущего шага сетки аппроксимации вдвое увеличивает погрешность определения коэффициента $a_{4,2}$ и соответственно уменьшает эффективность решения исследуемой коэффициентной обратной задачи.

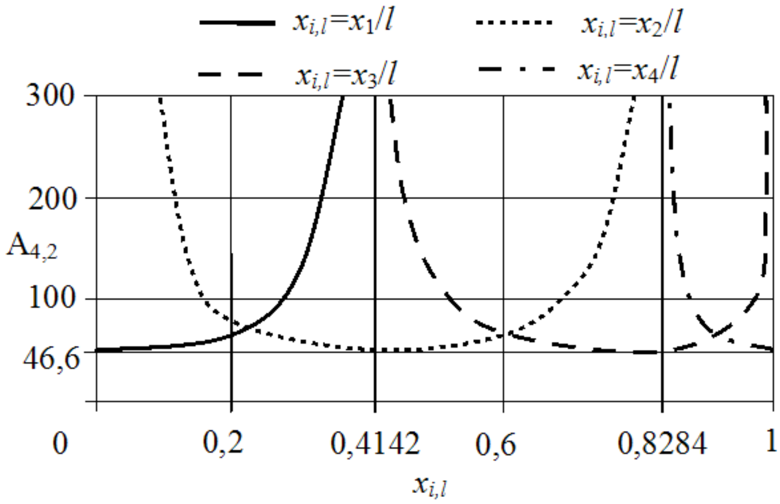

Рис. 1. Варианты графиков функций абсолютного числа обусловленности $A_{4,2}$

Fig. 1. Variants of graphs of absolute condition number functions $A_{4,2}$

В качестве альтернативы дифференцированию функции Лебега далее рассмотрим результаты использования экстремальных свойств многочленов с Чебышёвским альтернансом, в частности модифицирования многочлена Чебышёва первого рода в многочлен на замкнутом интервале [–1, 1] наименее уклоняющийся от нуля, имеющий n-1 нулей и равный $(-1)^{n-1}$ в точке с координатой (– 1).

Многочлены на отрезке [–1, 1] наименее уклоняющиеся от нуля, имеющие n-1 нулей и равные $(-1)^{n-1}$ в точке с координатой (– 1).

Пусть n – некоторое натуральное число. Для конечной последовательности $z_0, z_1, \ldots, z_n$ рассматриваем производящую функцию - алгебраический многочлен (14) степени $n \geq 2$, наименее уклоняющийся от нуля на замкнутом интервале [–1, 1], имеющий n–1 нулей и равный $(-1)^{n-1}$ в точке с координатой (– 1), допускающий на замкнутом интервале [–1, 1] представление сложной функцией

$$L_n(z,u) = \cos\big(n \arccos \tau_n(u)\big) \qquad (16)$$

от вспомогательной переменной τ_n, которая связана с аргументом u неоднородной линейной функцией

$$\tau_n = u\cos^2\frac{\pi}{2n} + \sin^2\frac{\pi}{2n}. \qquad (17)$$

Очевидно, многочлен (14) – модификация многочлена Чебышёва (15), если в многочлен Чебышёва ввести особенность (17) представления сложной функцией $T_n\,[\tau(u)]$. Отметим, что многочлен Чебышёва (15) на замкнутом интервале [–1, 1] имеет n корней и n +1 точек чебышёвского альтернанса, в которых $\max|T_n(z_m)| = 1$. Следующая теорема дает исчерпывающий ответ о форме и свойствах многочлена $L_n(z, u)$.

Теорема 1. Имеют место следующие свойства многочлена $L_n(z, u)$: многочлен $L_n(z, u)$ на замкнутом интервале [–1, 1] имеет n-1 действительных корней

$$u_{n,k,i} = -\frac{\sin^2(\pi/2n) + \cos\left[(2i+1)\pi/2n\right]}{\cos^2(\pi/2n)}, \quad i \in (1,\ldots,n-1) \tag{18}$$

на замкнутом интервале [–1, 1] справедливо равенство $\max|L_n(z, u)| = 1$, максимум достигается в n точках

$$u_{n,m,i} = 1 - \frac{1+\cos(i\pi/n)}{\cos^2(\pi/2n)}, \quad i \in (1,\ldots,n), \tag{19}$$

в точках (19) чебышёвского альтернанса многочлен $L_n(z, u)$ принимает чередующиеся значения $(-1)^{n-i}$;
старший коэффициент многочлена $L_n(z, u)$ равен $2^{n-1}\left(\cos{}^{\pi}\!/_{2n}\right)^{2n}$.

Доказательство. 1. Для доказательства корней (18) достаточно воспользоваться функциями (16) и (17), решить уравнение

$$\cos\left(n\arccos\left(u\cos^2\frac{\pi}{2n} + 1 - \cos^2\frac{\pi}{2n}\right)\right) = 0.$$

Вычисленные по формуле (18) n – 1 корней расположены на интервале [–1, 1] по возрастанию их значений, соответственно, по возрастанию значения i. Еще один корень расположен вне интервала [–1, 1]. Добавление i = 0 в формулу (18) дает искомый корень

$$u_{n,k,0} = -\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{2n} - \sec\frac{\pi}{2n},$$

расположенный на неограниченном открытом интервале (–∞, –1).

2. Справедливость второго утверждения следует из выражения для точек максимума и минимума многочлена (9) и из формулы (10) связи многочлена (16) с многочленом Чебышёва (15). Для доказательства формулы (19) достаточно решить уравнение

$$\frac{d}{du}\cos\left(n\arccos\left(u\cos^2\frac{\pi}{2n} + 1 - \cos^2\frac{\pi}{2n}\right)\right) = 0.$$

На замкнутом интервале [–1, 1] $L_n(z, u) = \cos(n\varphi)$ при $\tau_n(u) = \cos\varphi$, Следовательно, $|L_n(z, u)| \le 1$ при $\tau_n \le 1$, что доказывает утверждение $\max|L_n(z, u)| = 1$.

Отметим, что $L_n(z, u_{n,m,n}) = 1$. Точка $u_{n,m,n}$ находится на неограниченном открытом интервале ($u_{n,m,n-1}$, +∞), где значение многочлена $L_n(z, u)$ монотонно возрастает и стремится к +∞ при $u \to +\infty$ (рис. 3).

Вычисленные по формуле (19) n точек чебышёвского альтернанса расположены на интервале [–1, 1]. Очевидно, что еще одна точка, в которой $\max|T_n(z_m)| = 1$ должна быть на неограниченном открытом интервале (–∞, $u_{n,k,0}$). Добавление i = 0 в формулу (19) дает искомую точку

$$u_{n,m,0} = -\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{2n} - \sec^2\frac{\pi}{2n}.$$

Итак, функция (17) переносит альтернансность многочлена Чебышёва $T_n(\tau)$ многочлену $L_n(z, u)$.

Из альтернансности многочлена $L_n(z, u)$ следует последовательность $L_n(z, u_{n,m,n}) = 1$, $L_n(z, u_{n,m,n-1}) = -1$, $L_n(z, u_{n,m,n-2}) = 1$ и т.д., совпадающая с последовательностью $(-1)^{n\text{-i}}$.

3. Как известно, у многочлена (15) старший коэффициент равен 2^{n-1} [21, с. 125]. Многочлен (15) может быть представлен в виде:

$$T_n(\tau) = 2^{n-1}\prod_{i=1}^{n}\left(\tau - \tau_{n,k,i}\right).$$

Подстановка в последнюю формулу функции (17) для узлов $u_{n,k,i\text{-}1}$, соответствующих узлам $\tau_{n,k,i}$, дает представление многочлена $L_n(z, u)$ с n линейными сомножителями $\left[\left(\cos{\pi}/{2n}\right)^2\left(u - u_{n,k,i-1}\right)\right]$, а именно в виде

$$L_n(z,u) = z_n\prod_{i=0}^{n-1}\left(u - u_{n,k,i}\right),$$

где старший коэффициент z_n равен $2^{n-1}\left(\cos{\pi}/{2n}\right)^{2n}$.

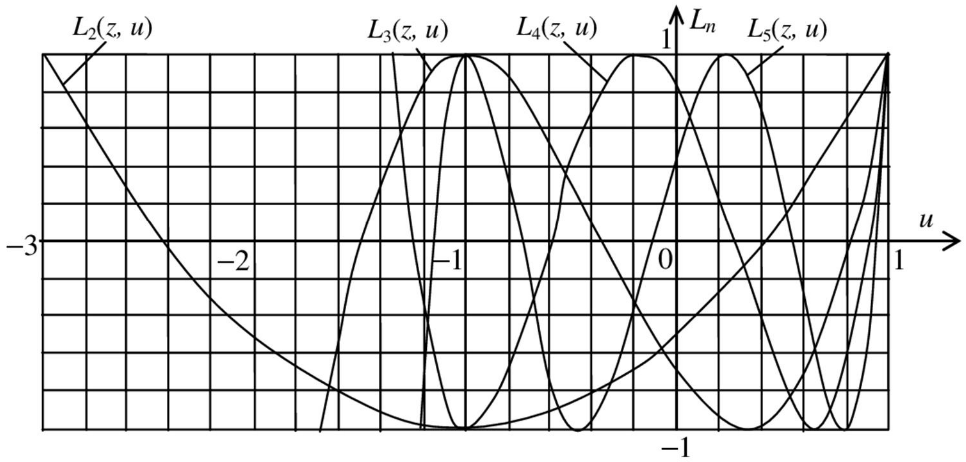

Рис. 2. Многочлены $L_n(z, u)$ для $n \in (1, \ldots, 5)$

Fig. 2. Polynomials $L_n(z, u)$ for $n \in (1, \ldots, 5)$

Вид многочленов $L_n(z, u)$ и их особые точки в зависимости от степени n представлены на частных примерах:

n = 2: $L_2(u) = \frac{1}{2}u^2 + u - \frac{1}{2}$,

$u_{2,k,0} = -1 - \sqrt{2}$, $u_{2,k,1} = -1 + \sqrt{2}$,

$u_{2,m,0} = -3$, $u_{2,m,1} = -1$, , $u_{2,m,2} = 1$;

n = 3: $L_3(u) = \frac{27}{16}u^3 + \frac{27}{16}u^2 - \frac{27}{16}u - \frac{11}{16}$,

$u_{3,k,0} = -\frac{1+2\sqrt{3}}{3} \approx -1,488$, $u_{3,k,1} = -\frac{1}{3}$,

$u_{3,k,2} = \frac{-1+2\sqrt{3}}{3} \approx 0,8214$, $u_{3,m,0} = -\frac{5}{3}$,

$u_{3,m,1} = -1$, $u_{3,m,2} = \frac{1}{3}$, $u_{3,m,3} = 1$;

n = 4: $u_{4,k,0} = 1 - \left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) \approx$

$\approx -1,2540$,

$u_{4,k,1} = 1 - \left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) \approx -0,6200$,

$u_{4,k,2} = 1 - \left(2-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) \approx 0,2768$,

$u_{4,k,3} = 1 - \left(2-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) \approx 0,9108$,

$u_{4,m,0} = -7 + 4\sqrt{2} \approx -1{,}343$, $u_{4,m,1} = -1$,

$u_{4,m,2} = -3 + 2\sqrt{2} \approx -0{,}1716$,

$u_{4,m,3} = -5 + 4\sqrt{2} \approx 0{,}6569$, $u_{4,m,4} = 1$;

***n* = 5:** $u_{5,k,0} = 1 - \frac{1}{10}\left(5-\sqrt{5}\right)\times$

$\times\left(4+\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right) \approx -1{,}157,$

$u_{5,k,1} = 1 - \frac{1}{10}\left(5-\sqrt{5}\right)\times$

$\times\left(4+\sqrt{2\left(5-\sqrt{5}\right)}\right) \approx -0{,}7554,$

$u_{5,k,2} = -1 + \frac{2}{5}\sqrt{5} \approx 0{,}1056$,

$u_{5,k,3} = 1 - \frac{1}{10}\left(5-\sqrt{5}\right)\times$

$\times\left(4-\sqrt{2\left(5-\sqrt{5}\right)}\right) \approx 0{,}5443,$

$u_{5,k,4} = 1 - \frac{1}{10}\left(5-\sqrt{5}\right)\times$

$\times\left(4-\sqrt{2\left(5-\sqrt{5}\right)}\right) \approx 0{,}9459,$

$u_{5,m,0} = -3 + \frac{4}{5}\sqrt{5} \approx -1{,}211$, $u_{5,m,1} = -1$,

$u_{5,m,2} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \approx -0{,}4472$,

$u_{5,m,3} = -2 + \sqrt{5} \approx -0{,}2361$,

$u_{5,m,4} = -1 + \frac{4}{5}\sqrt{5} \approx 0{,}7889$, $u_{5,m,5} = 1$.

Выражения многочленов $L_n(z, u)$, их корней и точек экстремума иррациональны. С ростом n усложняется получение соответствующих все более громоздких формул в радикалах, в частности коэффициентов многочленов $L_n(z, u)$ по формулам Виета.

В контексте теоремы 1 обсудим геометрическую интерпретацию преобразования многочлена $T_n(t)$ в многочлен $L_n(z, u)$. Пример, иллюстрирующий такое преобразование, показан на рис. 3. Видно, что геометрическая интерпретация уравнения (10), преобразование координат корней и точек экстремума многочлена $T_n(t)$ в соответствующие координаты многочлена $L_n(z, u)$ основано на введении угла

$$\rho_n = \arccos\left[\left(\cos{}^{\pi}\!/_{2n}\right)^2\right].$$

На примере многочленов второй степени показана связь корней (в виде кружочков) и точек экстремума в виде ромбиков) многочлена $T_2(\tau)$, построенных способом [8, с. 152], с корнями (18) и точками экстремума (19) многочлена $L_2(z, u)$.

Далее применим эти результаты к решению коэффициентной задачи для многочленов (1) и (2).

Чебышёвская интерполяция в коэффициентной обратной задаче

Подытожим полученные результаты модификации полинома Чебышёва первого рода.

Теорема 2. Если в коэффициентной обратной задаче известна степень n исследуемого алгебраического многочлена (1) с предписанным коэффициентом $a_{n,n-1}$ второго младшего члена, то при норме погрешности входных данных (8) для минимизации влияния погрешности входных данных на точность вычисления коэффициентов многочлена сетка аппроксимации допускает представление (3), в котором координаты узлов удовлетворяют равенствам

$$x_{n,i} = \left(1 - \frac{1+\cos{}^{\pi i}\!/_{n}}{1+\cos{}^{\pi}\!/_{n}}\right) l,\ i = 1:n. \quad (20)$$

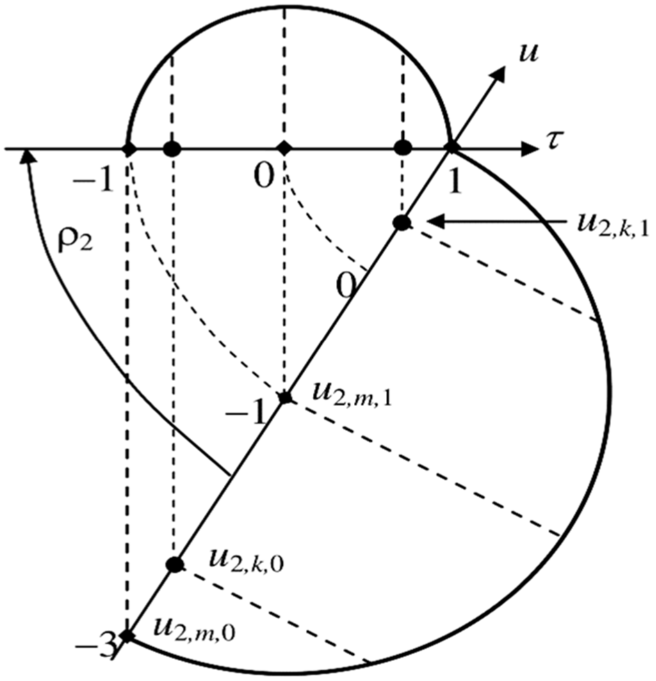

Рис. 3. Геометрическая интерпретация построения корней и точек экстремума многочлена $L_2(z,u)$

Fig. 3. Geometric interpretation of the construction of roots and extremum points of a polynomial $L_2(z,u)$

Теорема 2 доказывается по индукции с учетом формулы приведения координаты u на интервале $[-1, 1]$ к координате x на интервале $[0, l]$

$$x = \frac{u+1}{2}l, \quad u \in [-1, 1],$$

а именно к координатам $u_{n,m,i}$ и $x_{n,i}$ по формуле

$$x_{n,i} = \frac{u_{n,m,i}+1}{2}l, \quad i = 1:n.$$

Координаты узлов оптимальных сеток аппроксимации (3) с точечным множеством (20) при n, равном трем, четырем и пяти, представлены в табл. 3 всеми явными формулами в радикалах и численными значениями. Совпадение этих результатов с результатами, полученными по критерию (12), доказывает теоремы 1 и 2. Нет сомнений в том, что функция (20) применима и при $n > 5$.

Теорема 2 дает альтернансную характеризацию решения коэффициентной задачи для многочлена (1). Поскольку многочлены (1) и (2) отличаются только коэффициентами по соотношению $d_k = a_{n-k}k!$, то сетка аппроксимации (3) с точечным множеством (20) также эффективна для многочлена (2) применительно к обратной задаче Коши для поперечного изгиба балки в стоечно-балочной конструкции, когда возможна передача изгибающего момента от балки на стойку, задан (предписан) коэффициент d_1. В этой задаче внешняя нагрузка имеет вид: единичная нагрузка изгибающим моментом на свободном конце балки (при $n = 2$); изгибающий момент и сосредоточенная нагрузка на свободном конце балки (при $n = 3$); изгибающий момент и сосредоточенная нагрузка на свободном конце балки, постоянная распределенная нагрузка (при $n = 4$); изгибающий момент и сосредоточенная нагрузка на свободном конце балки, постоянная и линейно изменяющаяся возрастающая распределенная нагрузка (при $n = 4$) –это более сложное сочетание нагрузок,чем в исследованиях [31; 32; 33; 34].

Выводы

Данное исследование посвящено вопросам измерительно-полиномиальной обработки входных данных вычислительной системы в коэффициентной обратной задаче для алгебраических многочленов с предписанным коэффициентом второго младшего члена, в том числе в обратной задаче Коши.

Ввиду труднопреодолимого усложнения вывода формул оптимального плана координат узлов сетки аппроксимации лагранжевой аппроксимацией исследуемого многочлена с увеличением степени многочлена предложена модель, включающая модификацию многочленов Чебышёва первого рода.

Решение поставленной задачи возможно на основе выявленной функциональной связи оптимального плана координат узлов сетки аппроксимации с чебышёвским альтернансом предложенной модификации многочленов Чебышёва.

Эффективность предложенной модификации многочленов Чебышёва подтверждена совпадением решений одних и тех же задач, полученных с лагранжевой аппроксимацией и с модификацией многочленов Чебышёва.

Список литературы

1. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics. Inverse and Ill-Posed Problems Series 52. De Gruyter; Berlin, New York, 2008. 438 p. https://doi.org/10.1515/9783110205794.

2. Ватульян А. О., Плотников Д. К. Обратные коэффициентные задачи в механике // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019; 3: 37-47. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.04.

3. Перельмутер А. В. Обратные задачи строительной механики // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2020; 22(4): 83-101. https://doi.org/10.31675/1607-1859-2020-22-4-83-101.

4. Локтионов А. П. Информационно-измерительная система мониторинга балок в строительных конструкциях // Известия Юго-Западного государственного университета. 2021; 25(4): 29-51. https://doi.org/10.21869/2223-1560-2021-25-4-29-51.

5. Кабанихин С.И. Обратные задачи и искусственный интеллект // Успехи кибернетики. 2021; 2(3): 33-43. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-3-5.

6. Кудрявцев К.Я. Алгоритм построения полинома наилучшего равномерного приближения по экспериментальным данным // Вестник национального исследова-

тельского ядерного университета МИФИ. 2019; 8(5): 480-486. DOI: 10.1134/S2304487X1905002X.

7. Meshchikhin I.A., Gavryushin S.S. The envelope method in the problem of choosing a rational composition of measuring instruments // Measurement Techniques. 2021; 64: 151-155. https://doi.org/10.1007/s11018-021-01910-8.

8. Cheney E.W., Kincaid D.R. Numerical Mathematics and Computing. Thomson Brooks/Cole; Belmont, California, USA, 2013. 765 p. URL: https://hlevkin.com/ hlevkin/60numalgs/Pascal/Numerical%20Mathematics%20and%20Computing.pdf

9. Горелик В. А., Золотова Т. В. Полный метод чебышёвской интерполяции в задаче построения линейной регрессии // Чебышёвский сборник. 2022; 23(4): 52-63. https:// doi: 10.22405/2226-8383-2022-23-4-52-63.

10. Moore R., Kearfott R., Cloud M. Introduction to Interval Analysis. Society for Industrial and Applied Mathematics; Philadelphia, USA, 2009. 234 p.

11. Шарый С. П. Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: Издательство «XYZ», 2024. 662 с. URL: http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf

12. Boykov I.V., Krivulin N.P. An Approximate Method for Recovering Input Signals of Measurement Transducers // Measurement Techniques. 2022; 64: 943-948. https://doi.org/10.1007/s11018-022-02026-3.

13. Smirnova A., Bakushinsky A. On iteratively regularized predictor-corrector algorithm for parameter identification // Inverse Problems. 2020; 36(12), id.125015: 30 pp. https://doi: 10.1088/1361-6420/abc530.

14. Ibrahimoglu B.A. Lebesgue functions and Lebesgue constants in polynomial interpolation // Journal of Inequalities and Applications. 2016; 2016(93): 1-15. https://doi.org/10.1186/s13660-016-1030-3.

15. Бернштейн С.Н. Об ограничениях значений многочлена $P_n(x)$ стисни n на всем отрезке по его значениям в n+ 1 точках отрезка // Собр.соч. 2. Конструктивная теория функций. М.: Изд-во АН СССР, 1954. С.107126. URL: https://djvu.online/file/ScPjfDhUujCGo

16. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М.: Берлин: Директ-Медиа, 2021. 850 с. URL: https://archive.org/details/48915verzhbickiyvmosnovychislenny-hmetodov/page/n1/mode/2up

17. Калиткин Н.Н., Колганов С.А. Построение аппроксимаций, удовлетворяющих чебышевскому альтернансу // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020; 91: 33. https:// doi:10.20948/prepr-2020-91.

18. Loktionov A. P. Regularization of the lattice time function of the signal in the communication channel // Telecommunications and Radio Engineering. 2013; 72(2): 161-171. https:// doi: 10.1615/TelecomRadEng.v72.i2.70.

19. Локтионов А. П. Чебышёвский альтернанс при аппроксимации начальных условий обратной задачи Коши // Известия Юго-Западного государственного университета. 2021; 25(3): 86-102. https://doi.org/10.21869/2223-1560-2021-25-3-86-102.

20. Золотарев Е.И. Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля // Золотарев Е.И. Собр.соч. Вып. 2. Л.: Изд-во АН СССР, 1932. С. 1-59. https://doi.org/10.21638/ 11701/spbu01.2020.101.

21. Прасолов В.В. Многочлены. М: МЦНМО, 2003. 336 с. URL: https://klex.ru/uzw

22. Агафонова И. В., Малоземов В. Н. Экстремальные полиномы, связанные с полиномами Золотарёва // Доклады Академии наук. 2016; 5(467): 255–256. DOI: 10.7868/S0869565216090036.

23. Малоземов В.Н., Тамасян Г.Ш. Этюд на тему полиномиальной фильтровой задачи (n = 3) // Малозёмов В.Н. Избранные лекции по экстремальным задачам. Часть вторая. СПб.: Изд-во ВВМ, 2017. С. 305-315. URL: http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/reps15.shtml#0312.

24. Малоземов В.Н. Что даёт информация об альтернансе? // Малозёмов В.Н. Избранные лекции по экстремальным задачам. Часть вторая. СПб.: Изд-во ВВМ, 2017. С. 259-267. URL: http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/reps15.shtml#0312.

25. Loktionov A.P. Information measuring system of numerical differentiation for the analysis of elements of mechanical structures // Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. 2018; 12(2): 53-71. https://doi: 10.24874/jsscm.2018.12.02.04.

26. Агафонова И. В., Малоземов В. Н. Экстремальные полиномы, связанные с полиномами Золотарёва // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020; 65(7): 3-14. DOI:10.7868/S0869565216090036.

27. Соловьев С. Ю. Об одном классе множителей многочленов Чебышёва // Чебышёвский сборник. 2021; 22(4): 241-252. https://doi: 10.22405/2226-8383-2021-22-4-241-252.

28. Локтионов А.П. Восстановление начальных параметров балки при заданных младших коэффициентах уравнения прогибов // Строительная механика и расчет сооружений. 2022; 6: 2-7. https://doi: 10.37538/0039-2383.2022.6.2.7.

29. Luzon A. Moron M. A. Recurrence relations for polynomial sequences via Riordan matrices // Linear Algebra Appl.; 2010; 433: 1422-1446. https://doi.org/10.48550/arXiv.0904.2672.

30. Barry P. On the restricted Chebyshev–Boubaker polynomials // Integral Transforms Spec. Funct. 2017; 28: 1-16. https://doi.org/10.48550/arXiv.1702.04001.

31. Локтионов А.П. Обратная задача коши для балок в строительных конструкциях // Строительство и реконструкция. 2022. № 2(100). С. 13-25. https://doi: 10. 33979/2073-7416-2022-100-2-13-25.

32. Локтионов А. П. Модель обработки информации в коэффициентной обратной задаче для алгебраического многочлена // Известия Юго-Западного государственного

университета. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. 2022; 12(4): 177-191. https://doi.org/10.21869/ 2223-1536-2022-12-4-177-191.

33. Локтионов А. П., Титенко Е. А. Восстановление коэффициентов алгебраического многочлена с заданным свободным членом // Информационные системы и технологии. 2023; 135(1): 29-37.

34. Локтионов А.П. Обратная задача Коши для стоечно-балочной конструктивной системы // Строительство и реконструкция. 2023; 105(1): 1-15. https://doi: 10. 33979/2073-7416-2023-105-1-3-15.

References

1. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics. Inverse and Ill-Posed Problems Series 52. De Gruyter; Berlin, New York, 2008. 438 p. https://doi.org/10.1515/9783110205794.

2. Vatulyan A.O., Plotnikov D.K. Inverse coefficient problems in mechanics. *Vestnik Permskogo nacional`nogo issledovatel`skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika = PNRPU MECHANICS BULLETIN*. 2019; 3: 37-47. (In Russ.). https://doi: 10.15593/ perm.mech/2019.3.04.

3. Perelmuter A.V. Inverse problems of structural mechanics. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel`nogo universiteta = Vestnik of Tomsk State University of Architecture and Building.* 2020; 22(4): 83-101. (In Russ.). https://doi.org/10.31675/1607-1859-2020-22-4-83-101.

4. Loktionov A. P. Information and Measurement System for Monitoring Beams in Building Structures. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta = Proceedings of the Southwest State University*. 2021; 25(4): 29-51 (In Russ.). https://doi.org/10.21869/2223-1560-2021-25-4-29-51.

5. Kabanikhin S.I. Inverse Problems and Artificial Intelligence. *Uspekhi kibernetiki = Russian artificial intelligence Journal of Cybernetics.* 2021; 2(3): 33-43. (In Russ.). DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-3-5.

6. Kudryavtsev K.Ya. Algorithm for constructing a polynomial of the best uniform approximation from experimental data. *Vestnik natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta MIFI = Bulletin of the National Research Nuclear University MEPhI.* 2019; 8(5): 480-486. (In Russ.). https://doi: 10.1134/S2304487X1905002X.

7. Meshchikhin I.A., Gavryushin S.S. The envelope method in the problem of choosing a rational composition of measuring instruments. *Measurement Techniques*. 2021; 64: 151-155. https://doi.org/10.1007/s11018-021-01910-8.

8. Cheney E.W., Kincaid D.R. Numerical Mathematics and Computing. Thomson Brooks/Cole; Belmont, California, USA, 2013. 765 p. Available at: https://hlevkin.com/hlevkin/60numalgs/Pascal/Numerical%20Mathematics%20and%20Computing.pdf

9. Gorelik V.A., Zolotova T.V. The total method of Chebyshev interpolation in the problem of constructing a linear regression. *Chebyshevskii Sbornik = Chebyshev collection.* 2022; 23(4): 52-63. (In Russ.). https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-4-52-63.

10. Moore R., Kearfott R., Cloud M. Introduction to Interval Analysis. Society for Industrial and Applied Mathematics; Philadelphia, USA; 2009. 234 p.

11. Sharyi S. P. Finite-dimensional interval analysis. Novosibirsk: Izdatel'stvo «XYZ»; 2024. 662 p. Available at: http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf

12. Boykov I.V., Krivulin N.P. An Approximate Method for Recovering Input Signals of Measurement Transducers. *Measurement Techniques.* 2022; 64: 943-948. https://doi.org/10.1007/s11018-022-02026-3.

13. Smirnova A., Bakushinsky A. On iteratively regularized predictor-corrector algorithm for parameter identification. *Inverse Problems.* 2020; 36(12), id.125015: 30. https://doi: 10.1088/1361-6420/abc530.

14. Ibrahimoglu B.A. Lebesgue functions and Lebesgue constants in polynomial interpolation. *Journal of Inequalities and Applications.* 2016; 2016(93): 1-15. https://doi.org/10.1186/s13660-016-1030-3.

15. Bernshtein S.N. On the restrictions on the values of the polynomial $P_n(x)$, squeeze n on the entire segment by its values at $n + 1$ points of the segment. In: *Bernshtejn S.N. Sobr.soch., 2. Konstruktivnaya teoriya funktsii = Bernshtejn, S.N. Collected works, 2. Constructive theory of functions*. Moscow: Izdat. Akad. Nauk SSSR; 1954. P. 107-126. Available at: https://djvu.online/file/ScPjfDhUujCGo

16. Verzhbitskii V.M. Fundamentals of numerical methods. Moscow:, Berlin: Direkt-Media; 2021. 850 p. Available at: https://archive.org/details/ 48915verzhbickiyvmosnovy-chislennyhmetodov/page/n1/mode/2up

17. Kalitkin N.N., Kolganov S.A. Construction of approximations satisfying the Chebyshev alternance. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha = Preprints of the Institute of Applied Mathematics named after M.V. Keldysh*. 2020; 91: 33 (In Russ.). https://doi:10.20948/prepr-2020-91.

18. Loktionov A. P. Regularization of the lattice time function of the signal in the communication channel. *Telecommunications and Radio Engineering.* 2013; 72(2): 161-171. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v72.i2.70.

19. Loktionov A. P. Chebyshev Alternance when Approximating Initial Conditions of the Inverse Cauchy Problem. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta = Proceedings of the Southwest State University*. 2021; 25(3): 86-102 (In Russ.). https://doi.org/ 10.21869/2223-1560-2021-25-3-86-102.

20. Zolotarev E.I. Application of elliptic functions to questions about functions deviating least and most from zero. In: *Zolotarev E.I., Sobr.soch., Vypusk 2. = Zolotarev E.I., Collected works, Issue 2*. Leningrad. Izdat. Akad. Nauk SSSR; 1932. P. 1-59. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.101.

21. Prasolov V.V. Polynomials. Moscow: MTSNMO, 2003. 336 p. (In Russ.). Available at: https://klex.ru/uzw

22. Agafonova I.V., Malozemov V.N. Extremal polynomials connected with Zolotarev polynomials. *Doklady` Akademii nauk*. 2016; 467(5): 255-256. (In Russ.). https:/doi: 10.7868/S0869565216090036.

23. Malozemov V.N., Tamasyan G.Sh. Etude on the theme of the polynomial filter problem (n = 3). In: *Malozemov V.N. Selected lectures on extremal problems. Part two = Selected lectures on extremal problems. Part two*. St. Petersburg: Izd-vo VVM, 2017. P. 305-315. (In Russ.). Available at: http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/reps15.shtml#0312.

24. Malozemov V.N. What does information about alternance give? In: *Malozemov V.N. Selected lectures on extremal problems. Part two = Selected lectures on extremal problems. Part two*. St. Petersburg: Izd-vo VVM, 2017,pp. 259-267. (In Russ.). Available at: http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/reps15.shtml#0312.

25. Loktionov A.P. Information measuring system of numerical differentiation for the analysis of elements of mechanical structures. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics.* 2018; 12(2): 53-71. DOI: 10.24874/jsscm.2018.12.02.04.

26. Agafonova I. V., Malozemov V. N. Extremal polynomials connected with Zolotarev polynomials. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya = Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*. 2020; 7 (65): 3-14. (In Russ.). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.101.

27. Soloviev S. Y. On a class of factors of the Chebyshev polynomials. *Chebyshevskii sbornik = Chebyshev collection.* 2021; 22(4): 241-252. (In Russ.). https://doi: 10.22405/2226-8383-2021-22-4-241-252.

28. Loktionov A.P. Recovery of the initial parameters of the beam with the given junior coefficients of the deflection equation. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenii = Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2022; 6: 2-7. (In Russ.). https://doi:10.37538/0039-2383.2022.6.2.7.

29. Luzon A. Moron M. A. Recurrence relations for polynomial sequences via Riordan matrices. *Linear Algebra Appl.*; 2010; 433: 1422-1446. https://doi.org/10.48550/arXiv.0904.2672.

30. Barry P. On the restricted Chebyshev–Boubaker polynomials. *Integral Transforms Spec. Funct*. 2017; 28: 1-16. https://doi.org/10.48550/arXiv.1702.04001.

31. Loktionov A.P. Inverse cauchy problem for beams in building structures. *Building and Reconstruction*. 2022; 2(100): 13-25. (In Russ.). DOI: 10.33979/2073-7416-2022-100-2-13-25.

32. Loktionov A. P. Information Processing Model in the Coefficient Inverse Problem for an Algebraic Polynomial. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Upravlenie, vychislitel'naja tekhnika, informatika. Meditsinskoe priborostroenie = Proceedings of the Southwest State University. Series: Control, Computer Engineering, Information Science. Medical Instruments Engineering*. 2022; 12(4): 177–191. (In Russ.) https://doi.org/10.21869/2223-1536-2022-12-4-177-191.

33. Loktionov A.P. Titenko E.A. Recovery of the coefficients of an algebraic polynomial with a given free term. *Information Systems and Technologies.* 2023; 135(1): 29-37.

34. Loktionov A.P. Inverse cauchy problem for beams in building structures. *Building and Reconstruction*. 2023; 105(1): 1-15: 13-25. (In Russ.). https:// doi: 10.33979/2073-7416-2023-105-1-3-15.

Информация об авторе / Information about the Author

Локтионов Аскольд Петрович, доктор технических наук, профессор кафедры инфраструктурных энергетических систем, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская Федерация,
e-mail: loapa@mail.ru,
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1108-4185,
Researcher ID: P-5434-2015

Askold P. Loktionov, Dr. of Sci. (Engineering), Professor of the Infrastructural Energy Systems Department, Southwest State University, Kursk, Russian Federation,
e-mail: loapa@mail.ru,
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1108-4185,
Researcher ID: P-5434-2015