Оригинальная статья / Original article

УДК 004.832.38
https://doi.org/10.21869/2223-1560-2024-28-3-228-244

Преимущества применения вариационных интеграторов на группах Ли в задачах моделирования динамики механических систем

И. С. Моисеев [1] ✉, А. А. Жиленков [1]

[1] Санкт-Петербургский государственный морской технический университет
ул. Лоцманская, д. 3, г. Санкт-Петербург 190121, Российская Федерация

✉ e-mail: ilmoiseev@inbox.ru

Резюме

Целью исследования *является рассмотрение преимуществ применения вариационных интеграторов на группах Ли в задачах физически корректного моделирования динамики механических систем и сравнение их с классическими невариационными интеграторами.*

Методы. *Для демонстрации возможностей вариационных интеграторов на группах Ли была разработана математическая модель динамики физического маятника. При построении математической модели динамики физического маятника использовались методы вариационного исчисления и методы теории групп Ли. Для проведения сравнительного анализа вариационных и невариационных интеграторов использовался метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Моделирование осуществлялось в среде MATLAB.*

Результаты. *В ходе исследования разработан алгоритм вариационного интегратора на группах Ли для моделирования динамики физического маятника. Для сравнения вариационных интеграторов и метода Рунге-Кутты 4-го порядка были построены графики, показывающие, как изменяются с течением времени угловая скорость по осям, ортогональная ошибка, полная энергия и угловой момент. Графики демонстрируют, что несмотря на то, что угловая скорость для обоих методов одинакова, метод Рунге-Кутты не сохраняет геометрическую структуру непрерывной системы и не сохраняет основные постоянные величины моделируемой системы, а именно механическую энергию и импульс.*

Заключение. *Численное моделирование показало, что сохранение симплектических свойств систем и структуры групп Ли позволяет производить физически корректное компьютерное моделирование динамики механических систем. Вариационные интеграторы на группах Ли имеют существенные вычислительные преимущества по сравнению с классическими методами интегрирования, которые не сохраняют геометрическую структуру непрерывной системы и основные постоянные величины системы, и другими вариационными интеграторами, которые сохраняют либо ни одно, либо одно из этих свойств.*

Ключевые слова: *группы Ли; вариационное исчисление; вариационный интегратор; моделирование; динамика механических систем.*

Конфликт интересов: *Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.*

Для цитирования: Моисеев И. С., Жиленков А. А. Преимущества применения вариационных интеграторов на группах Ли в задачах моделирования динамики механических систем // Известия Юго-Западного государственного университета. 2024. Т. 28, №3. С. 228-244. https://doi.org/10.21869/ 2223-1560-2024-28-3-228-244.

Поступила в редакцию 25.06.2024 *Подписана в печать 22.07.2024* *Опубликована 30.09.2024*

Advantages of application of variational integrators on Lie groups in problems of modeling the dynamics of mechanical systems

Ilya S. Moiseev[1] ✉, Anton A. Zhilenkov [1]

[1] Saint-Petersburg State Marine Technical University
3, Lotsmanskaya str., Saint-Petersburg 190121, Russian Federation

✉ e-mail: ilmoiseev@inbox.ru

Abstract

Purpose of the research *is to consider advantages of application of variational integrators on Lie groups in problems of physically correct modeling of dynamics of mechanical systems and to compare them with classical nonvariational integrators.*

Methods. *To demonstrate the possibilities of variational integrators on Lie groups, a mathematical model of the dynamics of a physical pendulum was developed. Methods of variational calculus and methods of Lie group theory were used to construct a mathematical model of the dynamics of a physical pendulum. The Runge-Kutta method of the 4th order was used for comparative analysis of variational and nonvariational integrators. Modeling was carried out in MATLAB software.*

Results. *In this research, a variational integrator algorithm on Lie groups was developed to model the dynamics of a physical pendulum. To compare the variational integrators and the 4th order Runge-Kutta method, plots were constructed to show how the angular velocity along the axes, orthogonal error, total energy, and angular momentum change over time. The graphs demonstrate that although the angular velocity is the same for both methods, the Runge-Kutta method does not preserve the geometric structure of the continuous system and does not preserve the basic constant quantities of the modeled system, namely mechanical energy and momentum.*

Conclusion. *Numerical modeling has shown that the preservation of symplectic properties of systems and the structure of Lie groups allows to perform physically correct computer modeling of the dynamics of mechanical systems. Variational integrators on Lie groups have significant computational advantages over classical integration methods, which do not preserve the geometric structure of the continuous system and the basic constant quantities of the system, and other variational integrators, which preserve either none or one of these properties.*

Keywords: *lie groups; variational calculus; variational integrator; modeling; dynamics of mechanical systems.*

Conflict of interest. *The authors declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.*

For citation: Moiseev I. S., Zhilenkov A. A. Advantages of application of variational integrators on Lie groups in problems of modeling the dynamics of mechanical systems. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta = Proceedings of the Southwest State University*. 2024; 28(3): 228-244 (In Russ.). https://doi.org/10.21869/2223-1560-2024-28-3-228-244.

Received 25.06.2024 *Accepted 22.07.2024* *Published 30.09.2024*

***

Введение

Вариационное исчисление занимается нахождением экстремумов и в таком контексте является ветвью оптимизации. Однако задачи и методы в данной области существенно отличаются от задач оптимизации функций нескольких переменных из-за природы пространства, на котором определены оптимизируемые величины. Функционал представляет собой отображение множества функций в вещественные числа, и вариационное исчисление направлено на поиск экстремумов именно для функционалов, а не для функций. Таким образом, в роли кандидатов на экстремум выступают функции, а не векторы в пространстве $\mathbb{R}^n$. Функционалы обычно выражаются через определённые интегралы, а множество рассматриваемых функций определяется граничными условиями и требованиями гладкости, возникающими при постановке задачи или модели.

В физике вариационные принципы обладают универсальностью и представляют структуры и процессы как вытекающие из принципа оптимального действия [1, 2]. Все физические законы могут быть выражены в такой глобальной форме, которая позволяет восстановить локальные законы, такие как закон Ньютона о пропорциональности силы и ускорения тела в механике или закон Кулона о силе между двумя электрическими зарядами. Такой подход обеспечивает глубокое понимание локальных законов и демонстрирует фундаментальные принципы, которые стоят за ними. В фундаментальной физике, квантовой физике, теории элементарных частиц и общей теории относительности построение теорий определяется в основном свойствами симметрии и законами инвариантности.

Непреходящий интерес к вариационному исчислению отчасти объясняется его приложениями [2-6]. В частности, следует отметить связь данного предмета с классической механикой, где он является не просто математическим инструментом, а широкой концептуальной основой. Ярким примером является принцип Гамильтона в классической механике, а более ранний пример – принцип минимального времени Ферма в геометрической оптике [2]. Развитие вариационного исчисления в XVIII и XIX веках было в значительной степени мотивировано задачами механики.

Вариационные интеграторы в основе своей содержат идею продвижения численного решения вперёд по времени с добавлением к конфигурации моделируемой системы некоторого значения смещения. Тем не менее, некоторые механические системы имеют сложные конфигурационные пространства и при моделировании с использованием вариационных интеграторов происходит нарушение кинематических ограничений, создаваемых геометрическими связями в системе [3]. Группы Ли, названные в честь норвежского математика Софуса Ли, представляют собой группы непрерывных симметрий, которые могут быть использованы для описания динамики механических систем [1, 2, 7–9]. Например, конфигурационное пространство абсолютно твёрдых тел может быть представлено группой Ли SE(3), называемой евклидовой группой твёрдых движений. Представитель данной группы является матрицей, описывающей перемещения, в то время как группа SO(3) используется для описания ориентации. Группа SE(3) и её алгебра Ли se(3), элементы которой представляют собой бесконечно малые элементы SE(3) и могут быть интерпретированы как моментальные винтовые движения, а также экспоненциальное отображение, могут эффективно применяться в моделировании динамики механических систем [10-13].

Сочетание вариационных принципов и групп Ли позволяет проводить физически корректное компьютерное моделирование динамики механических систем, сохраняя геометрическую структуру моделируемой системы и её основные постоянные величины. Рассмотрим вариационные интеграторы на группах Ли, а также их с невариационными аналогами.

Материалы и методы

Одной из ключевых особенностей математических моделей, отражающих основные аспекты и свойства физических процессов и явлений, является наличие многочисленных симметрий и принципов сохранения, а также разнообразных качественных особенностей, выявляемых в процессе теоретического анализа. В таком контексте становится критически важным разработка и совершенствование методов математического моделирования физических процессов, сохраняющих геометрическую структуру, лежащую в основе моделируемого процесса, и физические свойства моделируемых систем, таких как законы сохранения энергии и момента.

Математические модели, описывающие динамику системы, т.е. связь входа системы $\boldsymbol{u}$ и состояния системы $\boldsymbol{x}$, используются для подходов к управлению на основе моделей. В зависимости от подхода, используется либо прямая, либо обратная модель [13-15]. Например, управление обратной динамикой использует обратную модель для компенсации динамики системы, а управление на основе прогнозирующих моделей и оптимальное управление используют прямую модель для вычисления будущих состояний с учетом последовательности действий. Для моделей с дискретным временем прямая модель f отображает состояние системы $\boldsymbol{x}_t$ и вход $\boldsymbol{u}_t$ в следующее состояние $\boldsymbol{x}_{t+1}$. Обратная же модель f^{-1} отображает состояние системы и следующее состояние на вход системы. Математически это описывается следующим образом

$$f\left(\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{u}_t;\boldsymbol{\theta}\right)=\boldsymbol{x}_{t+1},\quad f\left(\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{x}_{t+1};\boldsymbol{\theta}\right)=\boldsymbol{u}_t, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{\theta}$ – параметры модели. В системе с непрерывным временем следующее состояние $\boldsymbol{x}_{t+1}$ заменяется изменением состояния $\dot{\boldsymbol{x}}_t$, т.е.

$$f\left(\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{u}_t;\boldsymbol{\theta}\right)=\dot{\boldsymbol{x}}_t,\quad f\left(\boldsymbol{x}_t,\dot{\boldsymbol{x}}_t;\boldsymbol{\theta}\right)=\boldsymbol{u}_t\,. \qquad (2)$$

Система с непрерывным временем может быть объединена с интегратором, например, явным методом Эйлера или методом Рунге-Кутты, чтобы прогнозировать следующее состояние системы, а не её изменение.

Однако при таком подходе возникает проблема обеспечения постоянства сохраняющихся величин, таких как энергия и импульс системы. В частности, дискретное моделирование, даже с использованием передовых алгоритмов решения дифференциальных уравнений, в конечном итоге приводит к нежелательному и физически неправдоподобному поведению, даже для простых динамических систем, таких как N-звенный маятник, из-за накопления численных ошибок, как показано на рис. 1.

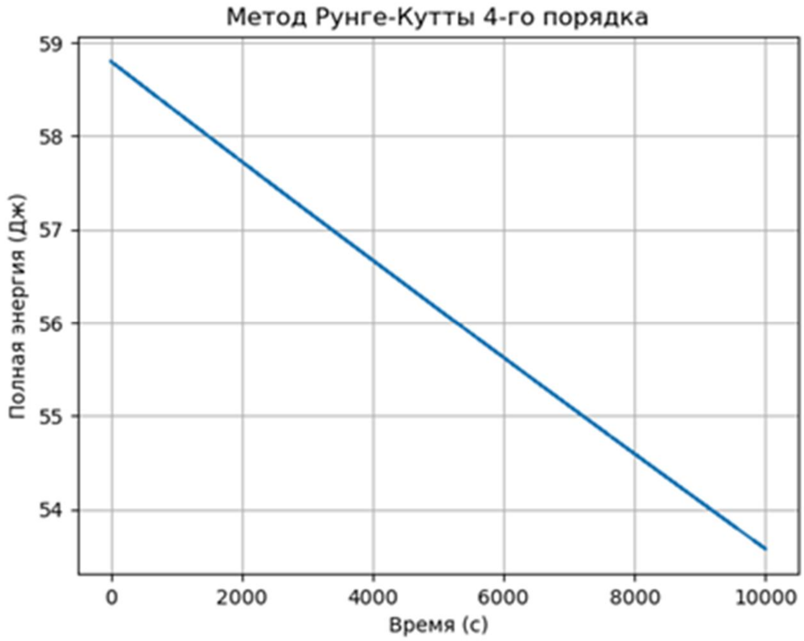

Рис. 1. Энергетическое поведение модели динамики плоского маятника с применением метода Рунге-Кутты четвертого порядка

Fig. 1. Energy behavior of a model of the dynamics of a plane pendulum using the fourth-order Runge-Kutta method

Указанный недостаток в моделировании с применением классических методов интегрирования является значительным, поскольку объективность и достоверность результатов математического моделирования напрямую зависят от сохранения физических законов и фундаментальных свойств моделируемых систем. Проблема накопления численных ошибок при применении классических методов интегрирования приводит к искажению фундаментальных свойств системы, таких как закон сохранения энергии и импульса, что ведет к возникновению физически неправдоподобного поведения системы. Такое нежелательное и физически неверное поведение модели делает ее непригодной для адекватного анализа и прогнозирования поведения реальных систем [16-18].

В качестве альтернативы традиционным методам, интеграторы, берущие за основу вариационные принципы, строятся путем дискретизации принципа Гамильтона [2, 17]. Такой подход позволяет систематически разрабатывать вариационные численные интеграторы для лагранжевых и гамильтоновых систем. Кроме того, данные методы демонстрируют хорошее энергетическое поведение, сохраняют симплектическую структуру и импульс системы даже при интегрировании на экспоненциально больших временных интервалах.

Данный тип интеграторов подробно рассмотрен Марсденом и Уэстом в работе [10], где они представили дискретный лагранжиан, который аппроксимирует интеграл лагранжиана по небольшому временному интервалу. Затем они вывели его вариацию через принцип наименьшего действия, создав дискретное уравнение Эйлера-Лагранжа. Там же показано, что вариационные интеграторы, основанные на формулировке дискретного уравнения Эйлера-Лагранжа, в значительной степени отделяют энергетическое поведение от размера шага, а также являются симплектическими, т.е. точно сохраняют импульсы, связанные с симметриями системы и обладают превосходной долговременной энергетической устойчивостью [9, 18].

Однако такой подход также приводит к численным ошибкам, вызванным нарушением кинематических ограничений моделируемой системы, обусловленных геометрическими связями (рис. 2).

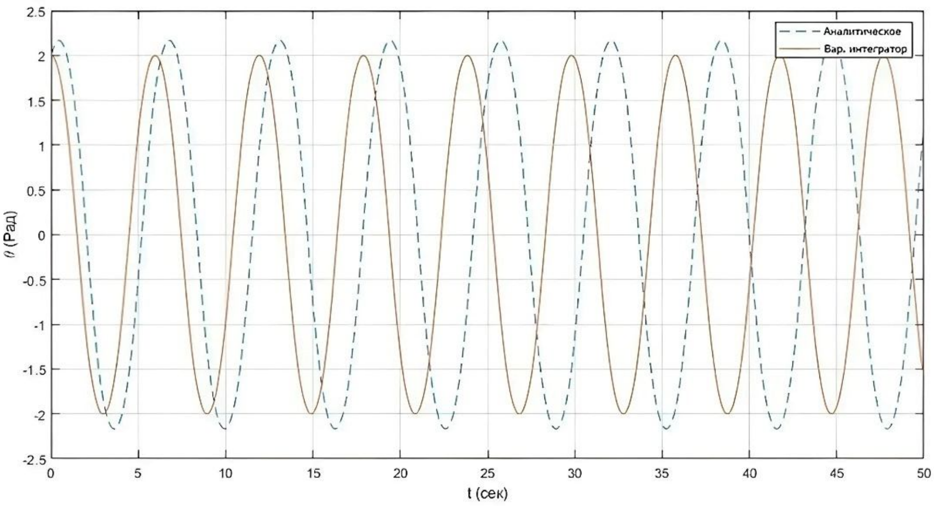

Рис. 2. Сравнение траектории движения материальной точки плоского маятника, полученной при моделировании с использованием вариационного интегратора, с аналитической траекторией

Fig. 2. Comparison of the motion trajectory for a material point of a plane pendulum, obtained by modeling using the variational integrator, with the analytical trajectory

Для решения данной проблемы предлагается использование геометрических численных интеграторов, известных как вариационные интеграторы на группах Ли. Вариационные интеграторы на группах Ли объединяют дискретные временные подходы лагранжевой и гамильтоновой механики с методами теории групп Ли, что позволяет систематически создавать численные интеграторы, сохраняющие геометрические свойства динамики и структуру группы Ли. Рассмотрим вариационные интеграторы на группах Ли и продемонстрируем, что они обладают значительными вычислительными преимуществами по сравнению с классическими интеграторами. Для начала кратко опишем основные определения и свойства групп Ли [7, 11, 19].

Группа – это множество G вместе с групповой операцией, обычно называемой умножением, такой, что для любых двух элементов p и h из G их произведение $g \cdot h$ – снова элемент из G. Требуется, чтобы групповая операция удовлетворяла следующим аксиомам:

1. Ассоциативность. Если p, h и k – элементы из G, то

$$g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k. \tag{3}$$

2. Единичный элемент. Существует выделенный элемент e в G, называемый единичным элементом, который обладает свойством

$$e \cdot g = g \cdot e = g, \tag{4}$$

для всех g из G.

3. Обратные. Для всякого g из G существует обратный, обозначаемый g^{-1}, обладающий свойством

$$g \cdot g^{-1} = e = g^{-1} \cdot g. \tag{5}$$

Группа Ли – это дифференцируемое многообразие, которое имеет групповую структуру такую, что групповая операция является гладким отображением [9, 18-20]. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ – это касательное пространство $T_e G$ группы Ли G в единичном элементе $e \in G$, со скобкой Ли $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, которая билинейна, кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби:

1. Билинейность. Пусть V – векторное пространство над полем $\Bbbk$. Отображение $\beta : V \times V \to \Bbbk$, $(u,w) \to \beta(u,w)$, линейное по каждому из двух аргументов при фиксированном другом, называется билинейной формой на пространстве V. Биленейность означает, что при всех $\lambda \in \Bbbk$ и $u, w \in V$ выполняются равенства

$$\beta(u, \lambda w) = \lambda \beta(u,w) = \beta(\lambda u, w), \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \beta(u_1 + u_2, w_1 + w_2) = \beta(u_1, w_1) + \\ + \beta(u_1, w_2) + \beta(u_2, w_1) + \beta(u_2, w_2). \end{gathered} \tag{7}$$

2. Кососимметричность. Кососимметричная функция β на векторном пространстве V над полем $\Bbbk$ произвольной характеристики определяется как билинейная форма $\beta : V \times V \to \Bbbk$, такая, что для всех u и w в V

$$\beta(u,w) = -\beta(w,u). \tag{8}$$

3. Тождество Якоби. Множество A с двумя бинарными операциями + и ×, с аддитивным тождеством 0, удовлетворяет тождеству Якоби, если:

$$\begin{gathered} x \times (y \times x) + z \times (x \times y) + \\ + y \times (z \times x) = 0, \quad \forall x, y, z \in A. \end{gathered} \tag{9}$$

В случае со скобкой Ли, данное выражение принимает вид

$$[X[Y,Z]] + [Y[Z,X]] + [Z[X,Y]] = 0. \tag{10}$$

При $g, h \in G$ отображение действующие на элемент группы слева $L_h : G \to G$ определяется как $L_h g = hg$. Аналогично, отображение, действующее на элемент группы справа $R_h : G \to G$, определяется как $R_h g = gh$. Пусть $\xi \in \mathfrak{g}$, определим векторное поле $X_\xi : G \to TG$ такое, что $X_\xi(g) = T_e L_g \cdot \xi$, и пусть соответствующая единственная интегральная кривая, проходящая через элемент e при $t=0$, обозначается $\gamma_{\xi}(t)$. Экспоненциальное отображение $\exp:\mathfrak{g}\to G$ определяется как $\exp\xi=\gamma_{\xi}(1)$. Экспоненциальное отображение является локальным диффеоморфизмом из окрестности нуля в $\mathfrak{g}$ на окрестность e в G.

Определим внутренний автоморфизм $I_g:G\to G$ как $I_g(h)=ghg^{-1}$. Присоединенный оператор $\mathrm{Ad}_g:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ является дифференциалом $I_g(h)$ относительно h при $h=e$ вдоль направления $\eta\in\mathfrak{g}$, т.е $\mathrm{Ad}_g\eta=T_eI_g\cdot\eta$. Оператор $\mathrm{ad}_{\xi}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ получается дифференцированием $\mathrm{Ad}_g\eta$ относительно g в точке e в направлении ξ, т.е. $\mathrm{ad}_{\xi}\eta=T_e\left(\mathrm{Ad}_g\eta\right)\cdot\xi$. Это соответствует скобке Ли, т.е. $\mathrm{ad}_{\xi}\eta=[\xi,\eta]$.

Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – спаривание касательного и кокасательного вектора. Коприсоединённый оператор $\mathrm{Ad}_g^*:G\times\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{g}^*$ определяется $\left\langle Ad_g^*\alpha,\xi\right\rangle=\left\langle\alpha,Ad_g\xi\right\rangle$ при $\alpha\in\mathfrak{g}^*$. Оператор $\mathrm{ad}^*:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{g}^*$ определяется $\left\langle ad_\eta^*\alpha,\eta\right\rangle=\left\langle\alpha,ad_\eta\xi\right\rangle$ при $\alpha\in\mathfrak{g}^*$.

Конфигурация тела в трёхмерном пространстве может быть описана расположением его центра масс и ориентацией. Расположение может быть задано в евклидовом пространстве, однако ориентация эволюционирует в нелинейном пространстве, которое имеет определённую геометрию.

Если быть точнее, ориентация определяется как направление в системе отсчёта, связанной с телом относительно независимой системы отсчета, рассматриваемой как линейное преобразование на векторном пространстве $\mathbb{R}^3$; математически ориентация может быть представлена ортонормированной матрицей 3×3. При этом необходимо, чтобы определитель данной матрицы был положительным, чтобы сохранить порядок ортонормированных осей в соответствии с правилом буравчика. Множество ортонормированных матриц 3×3 с положительным определителем является многообразием, поскольку оно локально диффеоморфно евклидову пространству, а также имеет групповую структуру с групповым действием ум-ножения матриц. Как было указано ранее, гладкое многообразие с групповой структурой является группой Ли; группа Ли ортонормированных матриц 3×3 с положительным определителем называется специальной ортогональной группой SO(3). Конфигурационным многообразием для комбинированного поступательного и вращательного движения тела является специальная евклидова группа SE(3), которая представляет собой полупрямое произведение $\mathrm{SE}(3)=\mathrm{SO}(3)\rtimes\mathbb{R}^3$. Прямое произведение групп Ли SE(3), SO(3) и $\mathbb{R}^n$ может представлять конфигурацию нескольких тел, и оно также является группой Ли, поскольку произведение групп Ли также является группой Ли. Поэтому конфигурационное многообразие соединения тел также является группой Ли.

Динамика механической системы описывается лагранжевой или гамильтоновой динамикой [2, 8]. Динамика лагранжевой и гамильтоновой системы обладает уникальными геометрическими свойствами; гамильтонов поток симплектичен, полная энергия сохраняется в отсутствие неконсервативных сил, и сохраняется отображение момента, связанное с симметрией системы.

Рассмотрим механическую систему, эволюционирующую на группе Ли G. В данном подходе используется формула Эйлера-Лагранжа с неконсервативными силами и обобщенными координатами. Обобщенные координаты $\boldsymbol{q}$ – это координаты, которые однозначно определяют конфигурацию системы без ограничений. Процедура получения уравнений Эйлера-Лагранжа для механической системы кратко представлена на рис. 3: траектория объекта определяется путем нахождения пути, который минимизирует интеграл лагранжиана по времени, называемый интегралом действия. В классических задачах лагранжиан выбирается как разность между кинетической и потенциальной энергией.

Преобразование Лежандра [8, 11] обеспечивает альтернативное описание механических систем, называемое гамильтоновой механикой. Основная идея применения данных процедур к группе Ли G состоит в том, чтобы выразить вариацию элементов группы в терминах алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с помощью экспоненциального отображения.

Конфигурационным многообразием в данном случае является группа Ли G. Касательное расслоение TG отождествляется с $G \times \mathfrak{g}$ путем левой тривиализации. Например, касательный вектор $(g, \dot{g}) \in T_g G$ выражается как

$$\dot{g} = T_e L_g \cdot \xi = g\xi, \tag{11}$$

при $\xi \in \mathfrak{g}$. Предполагается, что лагранжиан механической системы задается как $L(g,\xi) : G \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$.

Интеграл действия определяется как

$$A = \int_{t_0}^{t_1} L(g,\xi)\, dt. \tag{12}$$

Принцип Гамильтона гласит, что вариация интеграла действия равна нулю, то есть имеем

$$\delta A = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(g,\xi)\, dt = 0. \tag{13}$$

Пусть $g(t)$ – дифференциальная кривая в G, определенная для $t \in [t_0, t_f]$. Вариация – это дифференцируемое отображение $g^{\varepsilon}(t) : (-c, c) \times [t_0, t_f] \to G$ при $c > 0$ такое, что $g^0(t) = g(t)$ для любого $t \in [t_0, t_f]$ и $g^{\varepsilon}(t_0) = g(t_0)$, $g^{\varepsilon}(t_f) = g(t_f)$ для любого $\varepsilon \in (-c, c)$. С помощью экспоненциального отображения выражаем вариацию как

$$g^{\varepsilon}(t) = g \exp \varepsilon \eta(t), \tag{14}$$

для кривой $\eta(t)$ в $\mathfrak{g}$.

Соответствующая бесконечно малая вариация для g задаётся следующим образом

$$\delta g(t) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} g^{\varepsilon}(t) =$$

$$= T_e L_{g(t)} \cdot \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \exp \varepsilon\eta(t) = g(t)\eta(t). \quad (15)$$

Для каждого $t \in \left[t_0, t_f\right]$ бесконечно малая вариация $\delta g(t)$ лежит в касательном пространстве $T_{g(t)}G$.

Уравнения Эйлера-Лагранжа даются в виде

$$\frac{d}{dt} D_\xi L(g,\xi) - ad^*_\xi \cdot D_\xi L(g,\xi) - \quad (16)$$
$$- T_e^* L_g \cdot D_g L(g,\xi) = 0,$$

$$\dot{g} = g\xi, \quad (17)$$

где $D_g L \in T^* G$ обозначает производную лагранжиана L по g, задаваемую выражением

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} L\left(g^{\varepsilon}, \xi\right) = D_g L(g,\xi) \cdot \delta g, \quad (18)$$

и $D_\xi L \in \mathfrak{g}^*$ определяется аналогично.

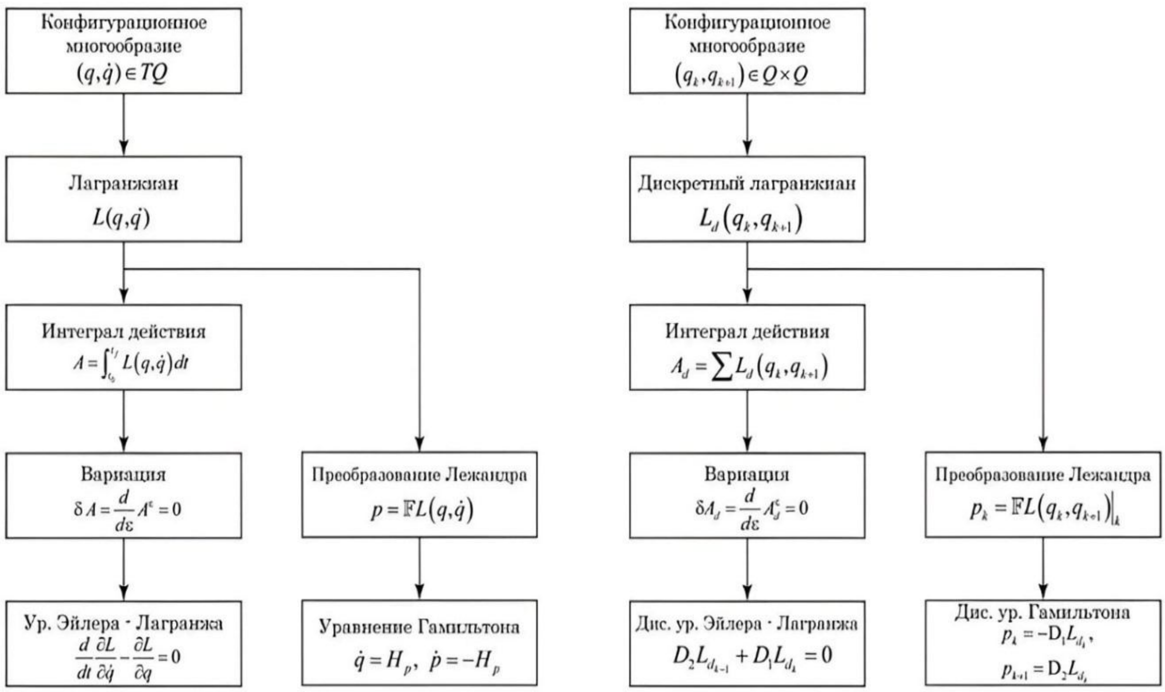

Рис. 3. Краткое описание процедуры получения уравнений Эйлера-Лагранжа (слева) и дискретных уравнений Эйлера-Лагранжа (справа)

Fig. 3. Brief description of the procedure for obtaining the Euler-Lagrange equations (left) and discrete Euler-Lagrange equations (right)

Основная идея данного подхода к получению уравнений движения заключается в выражении вариации кривой в G с помощью экспоненциального отображения, заданного (14). Выражение для вариации выбирается таким образом, чтобы варьируемая кривая лежала на конфигурационном многообразии G. Использование экспоненциального отображения $\exp : \mathfrak{g} \to G$ даёт следующие свойства:

1. Поскольку вариация получается с помощью групповой операции, она гарантированно лежит на G, что решает

проблему, связанную с нарушением кинематических ограничений моделируемой системы.

2. Вариация параметризуется кривой в линейном векторном пространстве $\mathfrak{g}$.

Результаты и их обсуждение

Применив рассмотренный подход, нами был получен алгоритм вариационного интегратора на группах Ли для случая физического маятника (рис. 4), который далее используется для моделирования динамики пространственного маятника, представляющего собой твёрдое, асимметричное тело, закреплённое на шарнире, в котором отсутствует трение, причём данный маятник подвержен действию однородного поля гравитации.

Физические константы для пространственного маятника выбраны равными:

$$m = 1\,\text{кг}, \quad \rho_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}3 \end{bmatrix}\ \text{м},$$

$$J = \begin{bmatrix} 0{,}13 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}28 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}17 \end{bmatrix} \text{кг} \cdot \text{м}^2.$$

Начальные условия равны:

$$R_0 = I_{3\times3}, \quad \Omega_0 = \begin{bmatrix} 4{,}14 & 4{,}14 & 4{,}14 \end{bmatrix}\ \text{рад/сек}.$$

Начало алгоритма

Параметры моделирования:

Задать временной шаг h;

Задать кол-во итераций k.

Начальные условия, соответствующие моменту времени $t = 0$:

Задать матрицу поворотов R_0;

Задать вектор угловой скорости Ω_0.

Параметры маятника:

Задать массу груза m;

Задать длину подвеса l;

Задать матрицу инерции J;

Задать длину от точки подвеса до центра тяжести ρ;

Задать ускорение свободного падения g.

Определение начальных значений:

$\Pi_0 = J\Omega_0$

$\frac{\partial U}{\partial R} = -mge_3\rho^T$

$\widehat{M} = (\frac{\partial U}{\partial R})^T R_0 + R_0^T \frac{\partial U}{\partial R}$

Вычислить(M)

Численное интегрирование модели:

Цикл от $i = 0$ до $k - 1$ выполнять

$h\Pi_i + \frac{h^2}{2}M = \frac{sin||f||}{||f||}Jf + \frac{1-cos||f||}{||f||^2}(f \times Jf)$

Вычислить(f)

$F = e^{\widehat{f}}$

$R_{i+1} = R_i F$

$\widehat{M} = (\frac{\partial U}{\partial R})^T R_{i+1} + R_{i+1}^T + \frac{\partial U}{\partial R}$

Вычислить(M)

$\Pi_{i+1} = R_{i+1}^T R_k \Pi_i + \frac{h}{2} mg R_{i+1}^T R_i (\rho \times R_i^T e_3) + \frac{h}{2} mg(\rho \times R_{i+1}^T e_3)$

$\Omega_{i+1} = J^T \Pi_{i+1}$

$t_{i+1} = t_i + h$

Вернуть Ω_{i+1}, t_{i+1}

Конец цикла

Вывод результатов моделирования:

Построить графики изменения угловой скорости Ω_i по осям в зависимости от времени t_i

Конец алгоритма

Рис. 4. Алгоритм вариационного интегратора физического маятника на группах Ли

Fig. 4. Algorithm of variational integrator of physical pendulum on Lie groups

Время моделирования $t = 30$ секунд и размер шага $h = 0{,}01$ секунды.

Полученные результаты для случая физического маятника продемонстрированы на рис. 5-8. На данных рисунках пунктиром отображён результат для интегратора, использующего метод Рунге-Кутта 4-го порядка, а сплошной – вариационный интегратор на группах Ли.

Как видно из графиков, хотя угловая скорость для обоих методов одинакова (рис. 5), метод Рунге-Кутты не сохраняет геометрическую структуру непрерывной системы, как показано на рис. 6, и не сохраняет основные постоянные величины системы, а именно механическую энергию (рис. 7) и импульс (рис. 8).

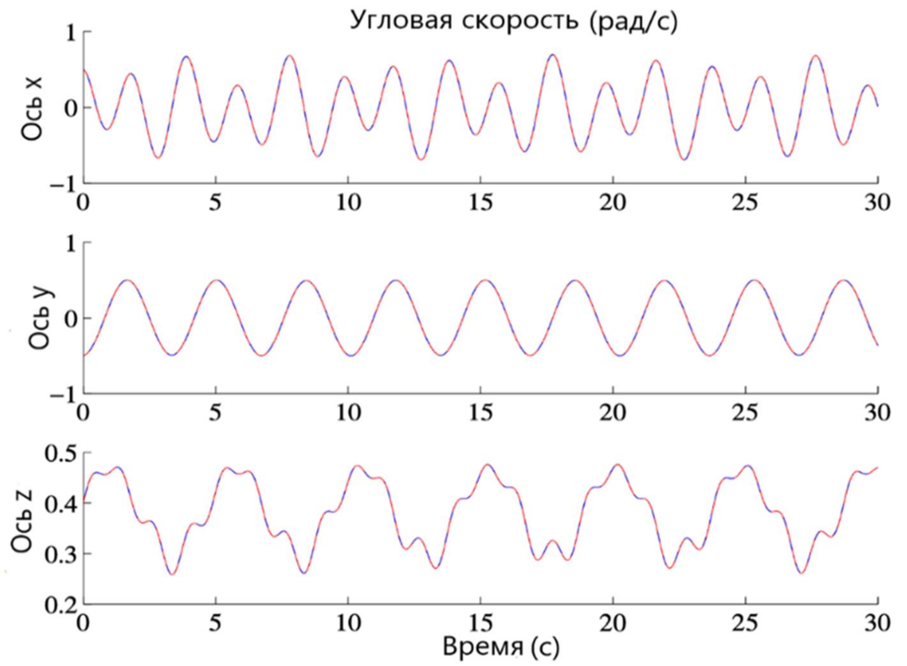

Рис. 5. Графики изменения угловой скорости по осям для физического маятника

Fig. 5. Plots of angular velocity along the axes for a physical pendulum

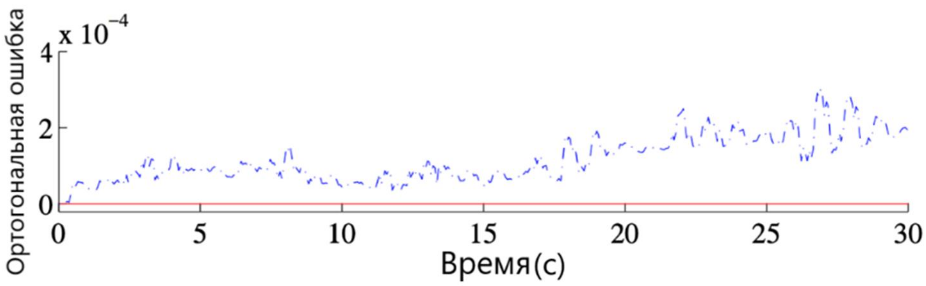

Рис. 6. График ортогональной ошибки для физического маятника

Fig. 6. Plot of orthogonal error for a physical pendulum

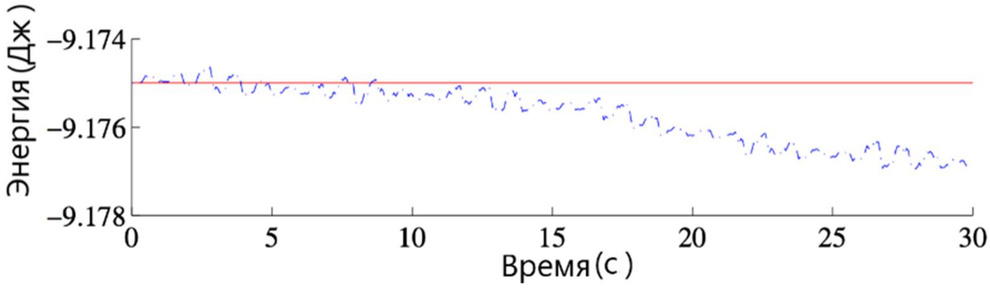

Рис. 7. График изменения полной энергии для физического маятника

Fig. 7. Graph of total energy change for a physical pendulum

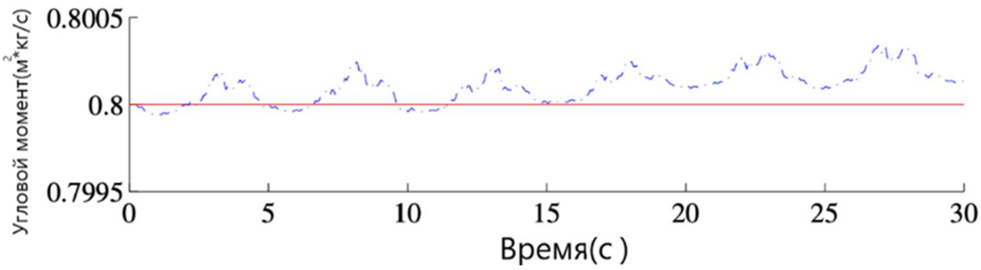

Рис. 8. График изменения углового момента для физического маятника

Fig. 8. Plot of angular momentum for a physical pendulum

Выводы

Результаты численного моделирования продемонстрировали важность сохранения геометрических свойств и симплектической структуры механических систем. Вариационные интеграторы, построенные на группах Ли, показали значительные преимущества перед классическими методами интегрирования, такими как метод Рунге-Кутты 4-го порядка. В отличие от классических методов, вариационные интеграторы сохраняют основные постоянные величины системы, включая механическую энергию и импульс, что обеспечивает физически корректное моделирование.

Построенная математическая модель динамики физического маятника и последующий анализ продемонстрировали, что вариационные интеграторы обеспечивают более точное и устойчивое решение, минимизируя численные ошибки, связанные с нарушением кинематических ограничений. Это делает их особенно полезными для задач долгосрочного моделирования сложных механических систем.

Таким образом, применение вариационных интеграторов на группах Ли является перспективным направлением в численном моделировании динамики механических систем, позволяя получать более надежные и точные результаты по сравнению с классическими методами.

Список литературы

1. Полак Л. С. Вариационные принципы механики // Сборник статей классиков науки. М.: Физматгиз, 1959. 932 с.

2. Полак Л. С. Вариационные принципы механики. Их развитие и применение в физике. 2-е изд. М.: Книжный дом «Либроком», 2010. 600 с.

3. Некоторые проблемы моделирования динамики механических систем и их решение методами вариационных интеграторов группы Ли / И. С. Моисеев, А. А. Жиленков, В. В. Ениватов, А. А. Зинченко // Электротехнические и информационные комплексы и системы. 2021. Т. 17, № 1. С. 81-89.

4. Geometric, variational integrators for computer animation / L. Kharevych, Y. Weiwei, Y. Tong et al. // Eurographics Symposium on Computer Animation. Austria. – Vienna: Eurographics Association, 2006. P. 43-51.

5. Zeng L., Jacobsen S. B. Variational Principle for Planetary Interiors // The Astrophysical Journal. 2016. Vol. 829, №1. P. 7.

6. Moiseev I. S., Zhilenkov A. A. Application of Variational Integrators in Modeling the Dynamics of Mechanical Systems // Proceedings of the 2021 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering, ElConRus 2021, Moscow, 2021. P. 554-558. https://doi.org/10.1109/ElConRus51938.2021.9396088.

7. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 639 с.

8. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с

9. Бураго Ю.Д., Залгаллер В.А. Введение в риманову геометрию. М.: Эдиториал УРСС, 2018. 320 с.

10. Marsden J. E., West M. Discrete mechanics and variational integrators // Acta Numerica. 2001. Vol. 10. P. 357-514.

11. Marsden J.E., Ratiu T.S. Introduction to Mechanics and Symmetry. New York: Springer, 1999. 586 p.

12. Nonsingular Integral-Type Dynamic Finite-Time Synchronization for Hyper-Chaotic Systems / K. A. Alattas, J. Mostafaee, S. Mobayen, et al. // Mathematics. 2022. Vol. 10, no. 1. https://doi.org/10.3390/math10010115. EDN ZDBGGV.

13. Zenkov D. V., Leok M., Bloch A. M. Hamel's formalism and variational integrators on a sphere // 2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Maui, HI, USA, 2012. P. 7504-7510. https://doi.org/10.1109/CDC.2012.6426779.

14. Lee T., Leok M., McClamroch N. H. Dynamics of connected rigid bodies in a perfect fluid // 2009 American Control Conference. St. Louis, MO, USA, 2009. P. 408-413. https://doi.org/10.1109/ACC.2009.5159850.

15. Fan T., Murphey T. Structured linearization of discrete mechanical systems on Lie groups: A synthesis of analysis and control // 2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). Osaka, Japan, 2015. P. 1092-1099. https://doi.org/10.1109/CDC.2015.7402357.

16. Lee T., Leok M., McClamroch N. H. Geometric numerical integration for complex dynamics of tethered spacecraft // Proceedings of the 2011 American Control Conference. San Francisco, CA, USA, 2011. P. 1885-1891. https://doi.org/10.1109/ACC.2011.5990836.

17. Schultz J., Murphey T. D. Extending filter performance through structured integration // 2014 American Control Conference. Portland, OR, USA, 2014. P. 430-436. https://doi.org/ 10.1109/ACC.2014.6858979.

18. Johnson E. R., Murphey T. D. Discrete and continuous mechanics for tree representations of mechanical systems // 2008 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Pasadena, CA, USA, 2008. P. 1106-1111. https://doi.org/ 10.1109/ROBOT.2008.4543352.

19. Bou-Rabee N., Owhadi H. Stochastic variational integrators // IMA Journal of Numerical Analysis. April 2009. Vol. 29, no. 2. P. 421-443. https://doi.org/10.1093/imanum/drn018.

20. Lee T., Leok M., McClamroch N. H. Dynamics of a 3D elastic string pendulum // Proceedings of the 48h IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference. Shanghai, China, 2009. P. 3347-3352. https://doi.org/10.1109/CDC.2009.5399611.

References

1. Polak L. S. Variacionnye principy mekhaniki. In: *Sbornik statej klassikov nauki = Principles of Mechanics. Collection of articles by classics of science*. Moscow: Fizmatgiz; 1959. 932 p. (In Russ.)

2. Polak L. S. Variational Principles of Mechanics. Their development and application in physics. 2nd ed. Moscow: Knizhnyj dom Librokom; 2010. 600 p. (In Russ.).

3. Moiseev I. S., Zhilenkov A. A., Enivatov V. V., Zinchenko A. A. Some problems of modeling the dynamics of mechanical systems and their solution by methods of Lie group variational integrators. *Elektrotekhnicheskie i informacionnye kompleksy i sistemy = Electrotechnical and information complexes and systems*, 2021: 17(1): 81-89. (In Russ.)

4. L Kharevych., Weiwei Y., Tong Y., et al. Geometric, variational integrators for computer animation. *Eurographics Symposium on Computer Animation*. Austria. Vienna: Eurographics Association; 2006. P. 43-51.

5. Zeng L., Jacobsen S. B. Variational Principle for Planetary Interiors. *The Astrophysical Journal.* 2016; 829 (1): 7.

6. Moiseev I. S., Zhilenkov A. A. Application of Variational Integrators in Modeling the Dynamics of Mechanical Systems. *In: Proceedings of the 2021 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering, ElConRus 2021.* Moscow; 2021. P. 554-558. https://doi.org/10.1109/ElConRus51938.2021.9396088.

7. Olver P. J. Applications of Lie Groups to Differential Equations. Moscow: Mir, 1989. 639 p. (In Russ.).

8. Arnold V. I. Matematicheskie metody klassicheskoj mekhaniki. Moscow: Nauka; 1989. 472 p. (In Russ.)

9. Burago Y. D., Zalgaller V.A. Introduction to Riemannian geometry. Moscow: Editorial URSS; 2018. 320 p. (In Russ.)

10. Marsden J. E., West M. Discrete mechanics and variational integrators. *Acta Numerica*. 2001. 10: 357-514.

11. Marsden J.E., Ratiu T.S. Introduction to Mechanics and Symmetry. New York: Springer; 1999. 586 p.

12. Alattas K. A., Mostafaee J., Mobayen S., et al. Nonsingular Integral-Type Dynamic Finite-Time Synchronization for Hyper-Chaotic Systems. *Mathematics*. 2022; 10 (1). https://doi.org/10.3390/math10010115. EDN ZDBGGV.

13. Zenkov D. V., Leok M., Bloch A. M. Hamel's formalism and variational integrators on a sphere. In: *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. Maui, HI, USA, 2012. P. 7504-7510. https://doi.org/10.1109/CDC.2012.6426779.

14. Lee T., Leok M., McClamroch N. H. Dynamics of connected rigid bodies in a perfect fluid. In: *2009 American Control Conference*. St. Louis, MO, USA, 2009. P. 408-413. https://doi.org/10.1109/ACC.2009.5159850.

15. Fan T., Murphey T. Structured linearization of discrete mechanical systems on Lie groups: A synthesis of analysis and control. In: *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. Osaka, Japan, 2015. P. 1092-1099. https://doi.org/10.1109/CDC.2015.7402357.

16. Lee T., Leok M., McClamroch N. H. Geometric numerical integration for complex dynamics of tethered spacecraft. In: *Proceedings of the 2011 American Control Conference*. San Francisco, CA, USA, 2011. P. 1885-1891. https://doi.org/10.1109/ACC.2011.5990836.

17. Schultz J., Murphey T. D. Extending filter performance through structured integration. In: *2014 American Control Conference*. Portland, OR, USA, 2014. P. 430-436. https://doi.org/ 10.1109/ACC.2014.6858979.

18. Johnson E. R., Murphey T. D. Discrete and continuous mechanics for tree representations of mechanical systems. In: *2008 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Pasadena, CA, USA, 2008. P. 1106-1111. https://doi.org/ 10.1109/ROBOT.2008.4543352.

19. Bou-Rabee N., Owhadi H. Stochastic variational integrators. *IMA Journal of Numerical Analysis*. April 2009; 29 (2): 421-443. https://doi.org/10.1093/imanum/drn018.

20. Lee T., Leok M., McClamroch N. H. Dynamics of a 3D elastic string pendulum. In: *Proceedings of the 48h IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*. Shanghai, China, 2009. P. 3347-3352. https://doi.org/10.1109/CDC.2009.5399611.

Информация об авторах / Information about the Authors

Моисеев Илья Сергеевич, ассистент кафедры киберфизических систем, Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, e-mail: ilmoiseev@inbox.ru, ORCID: https://orcid.org/0009-0005-9609-7576

Ilya S. Moiseev, Assistant, Cyber-Physical Systems Department, Saint-Petersburg State Marine Technical University, Saint-Petersburg, Russian Federation, e-mail: ilmoiseev@inbox.ru,ORCID: https://orcid.org/0009-0005-9609-7576

Жиленков Антон Александрович, кандидат технических наук, доцент, декан факультета цифровых промышленных технологий, Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, e-mail: zhilenkovanton@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1555-1318

Anton A. Zhilenkov, Cand. of Sci. (Engineering),, Associate Professor, Dean of the Digital Industrial Technologies Faculty, Saint-Petersburg State Marine Technical University, Saint-Petersburg, Russian Federation, e-mail: zhilenkovanton@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1555-1318