# СТРОИТЕЛЬСТВО

# CONSTRUCTION

Оригинальная статья / Original article

https://doi.org/10.21869/2223-1560-2023-27-3-21-33

(cc) BY 4.0

# Напряженно-деформированное состояние пологой оболочки на упругом основании с переменными прочностными характеристиками

## А. Г. Колесников <sup>1</sup> 🖂, А. А. Иванов <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Юго-Западный государственный университет ул. 50 лет Октября, д. 94, г. Курск 305040, Российская Федерация

⊠ e-mail: ag\_kolesnikov@mail.ru

#### Резюме

**Целью исследования** является исследование изменения напряженно-деформированного состояния конструкций пологих оболочек на упругом основании при изменении его прочностных характеристик.

**Методы.** Методом Бубнова-Галеркина решается система дифференциальных уравнений состояния пологих оболочек на упругом основании с учетом геометрической нелинейности работы материала конструкции. Аппроксимирующая функция позволяет моделировать различные условия опирания конструкции на основание.

**Результаты.** В аналитическом виде получены выражения для определения напряжений и критической нагрузки в изотропных пологих оболочках, покоящихся на упругом основании с учетом геометрической нелинейности работы конструкции. Прочностные характеристики основания заданы функцией, что позволяет моделировать различные грунты и их распределение под подошвой конструкции. Приведены графики возможного распределения коэффициента, характеризующего быстроту затухания осадок в глубине основания под подошвой фундамента. Показано несколько вариантов резкого уменьшения прочностных характеристик основания под частью конструкции. Приведены зависимости критической нагрузки для пологой оболочки от изменения форм и величин участков упругого основания с пониженными прочностными характеристиками. Показаны сравнительные графики напряжений и критической нагрузки для конструкций фундаментов зданий и сооружений в виде плит и пологих оболочек на упругом основании.

Заключение. Приведенные аналитические уравнения для определения напряжений и критической нагрузки позволяют проектировать и исследовать фундаменты зданий и сооружений в виде плит и пологих оболочек на упругом основании. Показанные зависимости помогают подобрать рациональные геометрические характеристики конструкций, позволяющие сохранить несущую способность при изменении прочностных характеристик основания под частью конструкции.

**Ключевые слова:** упругое основание; фундамент; пологая оболочка; критическая нагрузка; пространственные конструкции.

<sup>©</sup> Колесников А. Г., Иванов А. А., 2023

Известия Юго-Западного государственного университета / Proceedings of the Southwest State University. 2023; 27(3): 21-33

**Конфликт интересов:** Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Для цитирования:** Колесников А. Г., Иванов А. А. *Напряженно-деформированное состояние пологой оболочки на упругом основании с переменными прочностными характеристиками // Известия* Юго-Западного государственного университета. 2023; 27(3): 21-33. https://doi.org/10.21869/2223-1560-2023-27-3-21-33.

Поступила в редакцию 23.07.2023

Подписана в печать 05.09.2023

Опубликована 28.10.2023

# Stress-Strain State of Shallow Shell in an Elastic Foundation with Variable Strength Characteristics

Alexander G. Kolesnikov <sup>1</sup> , Andrey A. Ivanov <sup>1</sup>

Southwest State University
 50 Let Oktyabrya str. 94, Kursk 305040, Russian Federation

🖂 e-mail: ag\_kolesnikov@mail.ru

#### Abstract

**Purpose of research**. Changes in the stress-strain state of structures of shallow shells on an elastic foundation with a change in its strength characteristics investigation.

**Methods.** To solve a system of differential equations of state for shallow shells in an elastic state the Bubnov-Galerkin method is used. Geometric non-linearity of work material of construction is taken into account. The approximating function allows you to simulate various conditions for supporting a structure on a foundation.

**Results.** Expressions are obtained for determining the stresses and critical load in isotropic shallow shells resting on an elastic foundation in analytical form. The geometric nonlinearity of the structure taking into account. The strength characteristics of the base are given by a function, which allows modeling various soils and their distribution under the base of the structure. Graphs of the possible distribution of the coefficient characterizing the rate of sediment attenuation in the depth of the foundation under the base of the foundation are given. Several variants of a sharp decrease in the strength characteristics of the base and sizes of sections of the elastic foundation with reduced strength characteristics are given. Comparative graphs of stresses and critical load are shown for the foundation structures of buildings and structures in the form of slabs and shallow shells on an elastic foundation.

**Conclusion**. Analytical equations for stresses and critical loads determining make it possible to design and investigation the foundations of buildings and structures in the form of slabs and shallow shells on an elastic foundation. The dependencies lets to select rational geometric characteristics of structures, allowing maintaining the bearing capacity when changing the strength characteristics of the base under a part of the structure.

Keywords: shallow shell; elastic foundation; building foundation; critical load; spatial structures.

**Conflict of interest.** The authors declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

**For citation:** Kolesnikov A. G., Ivanov A. A. Stress-Strain State of Shallow Shell in an Elastic Foundation with Variable Strength Characteristics. Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta = Proceedings of the Southwest State University. 2023; 27(3): 21-33 (In Russ.). https://doi.org/10.21869/2223-1560-2023-27-3-21-33.

Received 23.07.2023

Accepted 05.09.2023

Published 28.10.2023

\*\*\*

#### Введение

Фундаменты в виде сплошных монолитных плит применяются при относительно слабых, водонасыщенных грунтах и значительных нагрузках на основание. При этом может произойти частичное ухудшение несущей способности грунта основания под зданием или сооружением, что влечет за собой разрушение вышестоящих конструкций даже при использовании сплошного фундамента (рис.1).



**Рис. 1.** Примеры последствий изменения несущей способности грунта под частью здания и сооружения

Fig. 1. Examples of the consequences of subsidence of soil under a part of a building and structure

Эти негативные процессы могут быть учтены на стадии проектирования путем внесения дополнительных коэффициентов или расчета на запроектные воздействия. Однако это неизменно приведет к увеличению стоимости конструкции и увеличению её веса.

Альтернативным путем является рационализация напряженно-деформированного состояния конструкции за счет изменения формы – придание небольшой стрелы подъема, т.е. использования в качестве фундаментов зданий и сооружений пологих оболочек на упругом основании. В настоящее время исследование фундаментов в виде плит и пологих оболочек на упругом основании представлено большим количеством авторов, работающих в разных странах. Наиболее интересны в рамках проводимого исследования работы, посвященные изменению прочности и устойчивости конструкций [1-5] при варьировании различных параметров. Известны работы по изучению колебаний плитных конструкций на упругом основании [6-9], в том числе при учете геометрической нелинейности работы тонкой конструкции [10,11]. Проводятся исследования конструкций из ортотропных материалов [12-14] и многослойных составных конструкций [15], что позволяет моделировать работу железобетонных фундаментов с различным армированием.

При проведении современных расчетов и исследований в большинстве случаев используются программные комплексы, реализующие численные методы [16,17]. Однако в решении некоторых задач проектирования, а особенно синтеза и оптимизации конструкций более точные результаты можно получить с использованием численных методов прямого вариационного исчисления [18].

При использовании существующих методик исследования напряженно-деформированного состояния пологих оболочек на упругом основании возникают сложности с учетом изменения прочностных характеристик грунта под частью основания. Следовательно, есть необходимость в развитии таких методик.

### Материалы и методы

Для расчета фундамента в виде плиты или пологой оболочки на прямоугольном плане, находящейся на упругом основании (рис.1) с произвольным видом опирания и соотношением сторон, загруженного вертикальной равномерно распределенной нагрузкой, воспользуемся системой уравнений (1). Величины прогибов соизмеримы с толщиной конструкции, которая мала по сравнению с размерами в плане. Запишем уравнение (1) так, чтобы оно учитывало геометрическую нелинейность работы конструкции [19, 20]:

$$\begin{cases} \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2k_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\ + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0; \\ D \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \left(k_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \left(k_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \\ + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \left(k_{xy} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) = Z + 2t \nabla^2 w - kw, \end{cases}$$
(1)

где φ, w, Z – соответственно функции напряжений, прогибов и нагрузки; k – параметр, характеризующий работу упругого основания на сжатие; t – параметр, характеризующий работу упругого основания на сдвиг.

Параметры работы упругого основания запишем в виде:

$$k = \frac{E_{och}}{1 - v_{och}} \int_0^H \Psi'^2 dz, \qquad (2)$$

$$t = \frac{E_{ocH}}{4(1-v_{ocH})} \int_0^H \Psi^2 \, dz.$$
 (3)

Входящие в выражения для определения характеристик работы упругого основания на сдвиг и на сжатие неизвестные могут быть определены из соотношений:

$$E_{och} = \frac{E_s}{1 - v_s},$$
 (4)

$$v_{\rm och} = \frac{v_{\rm s}}{1 - v_{\rm s}},\tag{5}$$

где  $E_s$  и  $v_s$  — соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона основания (рис. 2);  $\Psi(z)$  — функция поперечного распределения перемещений; Н толщина основания, участвующего в работе.

Модуль упругости основания из некоторого количества слоев грунта с различными деформативными и прочНапряженно-деформированное состояние пологой оболочки... 25

ностными характеристиками может быть получен последовательным приведением двуслойной системы к однослойной.

Функция поперечного распределения перемещений задана в виде:

$$\Psi(z) = \frac{sh\gamma^{\frac{H-z}{a}}}{sh\gamma^{\frac{H}{a}}},$$
 (6)

где γ – коэффициент, характеризующий быстроту затухания осадок в глубине основания.





Коэффициент у может быть представлен в виде функции, задающей различную скорость затухания осадок под подошвой фундамента. Например, может быть использована функция вида:

$$\gamma(x,y) = \gamma_{\min} \left( 1 + s \left( \frac{(x+m)}{a} \right)^{2\eta} \right) \left( 1 + l \left( \frac{(y+n)}{b} \right)^{2\theta} \right), (7)$$
  
где  $\gamma_{\min}$  – минимальное значение коэф-  
фициента, характеризующего быстроту  
затухания осадок в глубине основания  
под подошвой фундамента; s, m, l, n, η,  
 $\theta$  – коэффициенты, характеризующие  
форму изменения коэффициента, ха-  
рактеризующего быстроту затухания  
осадок в глубине основания под подош-  
вой фундамента.

Варьирование коэффициентов s, m, l, n, η, θ позволяет задавать большое ко-

личество вариантов распределения отпора (формы и значений) под подошвой фундамента.

Рассмотрим случай, когда свойства грунта меняются под частью конструкции. В том числе, когда его значение стремится к нулю. Используя выражение (7), смоделируем несколько вариантов (рис. 3).

Напряжения в любой точке оболочки можно определить по четвертой гипотезе прочности при помощи метода Бубнова-Галеркина с применением балочных функций В.З. Власова [21]:

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\overline{\sigma_1} - \overline{\sigma_2})^2 + (\overline{\sigma_3} - \overline{\sigma_2})^2 + (\overline{\sigma_2} - \overline{\sigma_1})^2]}, \quad (8)$$

где напряжения вдоль оси х (см. рис. 2):

$$+ \left| \overline{A} \frac{\partial^{-}}{\partial x^{2}} Z_{x} Z_{y} \overline{t} \right| +$$

$$+ \left| \frac{g}{t^{2}} \overline{D} \overline{B} \left( \frac{\partial^{3}}{\partial y^{3}} Z_{y} Z_{x} + \frac{\partial}{\partial y} Z_{y} \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} Z_{x} \right) \right|.$$
(10)

- напряжения вдоль оси z (см. рис. 2):

$$\overline{\sigma_{3}} = \left| \frac{6}{\overline{t}} (1 - \nu) \overline{D} \overline{B} \frac{\partial}{\partial x} Z_{x} \frac{\partial}{\partial y} Z_{y} \right| + \left| \overline{A} \frac{\partial}{\partial x} Z_{x} \frac{\partial}{\partial H} Z_{y} \overline{t} \right|.$$
(11)

Безразмерный коэффициент цилиндрической жесткости:

$$\overline{D} = \frac{D}{Eh^3}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-v^2)}.$$
 (12)

Неизвестные метода Бубнова-Галеркина, входящие в выражения для определения напряжений:

$$\overline{A} = \frac{A \cdot a^2}{E f^5}, \qquad \overline{B} = \frac{B \cdot a^2}{f^2}, \qquad (13)$$

$$A = -\frac{1}{J_{1}} (BJ_{2} + B^{2}J_{3}), \qquad (14)$$

$$B = \frac{1}{6C_{1}} (36C_{3}C_{2}C_{1} + 108qC_{1}^{2} - 8C_{2}^{3} + 12\sqrt{3}(4C_{3}^{3}C_{1} - C_{3}^{2}C_{2}^{2} + 18C_{3}C_{2}C_{1}q + 27q^{2}C_{1}^{2} - 4qC_{2}^{3})^{1/2}C_{1})^{1/3} - \frac{2}{3} (3C_{3}C_{1} - C_{2}^{2})/(C_{1}(36C_{3}C_{2}C_{1} + 108qC_{1}^{2} - 8C_{2}^{3} + 12\sqrt{3}(4C_{3}^{3}C_{1} - C_{3}^{2}C_{2}^{2} + 18C_{3}C_{2}C_{1}q + 27q^{2}C_{1}^{2} - 4qC_{2}^{3})^{1/2}C_{1})^{1/3} - \frac{1}{3}\frac{C_{2}}{C_{3}}). \qquad (15)$$

Безразмерная стрела подъема и толщина конструкции заданы соответственно выражениями:

$$g=\frac{f}{a}$$
,  $\bar{t}=\frac{h}{f}$ . (16)

Коэффициенты, входящие в уравнения для определения неизвестных метода Бубнова-Галеркина:

$$C_{1} = 2Eh \frac{J_{3}^{2}}{J_{1}J_{4}}, C_{2} = 3E \frac{J_{3}J_{2}}{J_{1}J_{4}},$$

$$C_{3} = D \frac{J_{1}^{2}}{J_{1}J_{4}} + Eh \frac{J_{2}^{2}}{J_{1}J_{5}}.$$
(17)



- **Рис. 3.** Форма распределения коэффициента, характеризующего быстроту затухания осадок в глубине основания под подошвой части фундамента
- Fig. 3. Distribution of values of the attenuation coefficient of settlement under the sole of the foundation part

$$J_1 = \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} (\nabla^2 \nabla^2 \overline{w}) \overline{w} dx dy, \qquad (18)$$

$$J_{2} = \int_{a}^{a} \int_{b}^{b} \left( \frac{\partial^{2} F}{\partial y^{2}} \frac{\partial^{2} \overline{w}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} F}{\partial x^{2}} \frac{\partial^{2} \overline{w}}{\partial y^{2}} - 2 \frac{\partial^{2} F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^{2} \overline{w}}{\partial x \partial y} \right) \overline{w} dxd, (19)$$

$$J_{3} = \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} (\Delta \overline{w}) \overline{w} dx dy, \qquad (20)$$

$$J_4 = \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} Z \overline{w} dx dy, \qquad (21)$$

$$J_{5} = \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} (2t\nabla^{2}\overline{w} \cdot k\overline{w}) \overline{w} dx dy.$$
 (22)

В соотношениях (1-16) приняты следующие обозначения:

h – постоянная вдоль образующей толщина конструкции фундамента;

Е – модуль упругости материала конструкции фундамента;

 ν – коэффициент Пуассона материала конструкции;

F=F(x,y) – функция срединной поверхности, которую можно представить в виде поверхности переноса [20];

А, В – неизвестные, используемые при применении метода Бубнова-Галеркина,

Z<sub>x</sub>, Z<sub>y</sub> – балочные функции В.З. Власова.

При проектировании зданий и сооружений зачастую встречаются фундаменты, толщина которых значительно меньше размеров в плане, поэтому возникает необходимость проверки конструкции на устойчивость. Для определения коэффициента критической нагрузки для рассматриваемой конструкции воспользуемся уравнением:

 $p_{cr} = \frac{2}{27} \frac{1}{C_1^2} \Big[ (C_1^2 3 C_1 C_3)^{3/2} + C_2 (C_2^2 \frac{9}{2} C_1 C_3) \Big], (23)$ где коэффициенты C<sub>1</sub> – C<sub>3</sub> определяются соотношениями (17). Выражения для определения напряжений (8) и критической нагрузки (23) для конструкций фундаментов в виде пологих оболочек могут быть использованы как в проектировании, так и в исследовании влияния различных факторов на напряженно-деформиро-ванное состояние конструкций.

#### Результаты и их обсуждение

Предложенная система уравнений, описывающих изменение напряженнодеформированного состояния конструкций фундаментов при изменении несущей способности грунта позволяет проводить исследования, оптимизировать геометрические параметры конструкции исходя из конкретных условий работы.

Уравнения для определения напряжений (8) и критической нагрузки (23) содержат функцию срединной поверхности, изменение которой в значительной мере меняет распределение внутренних усилий [20] и позволяет подобрать поверхность, отвечающую заданным эксплуатационным характеристикам.

Для удобства проведения исследований, получения зависимостей, сравнения получаемых результатов с другими методиками и анализа вносимых изменений без привязки к конкретным размерам, уравнения для определения напряжений и критической нагрузки представлены в безразмерном виде.

Использование изменяющейся формы распределения коэффициента, характеризующего быстроту затухания осадок в глубине основания под подош-

Известия Юго-Западного государственного университета / Proceedings of the Southwest State University. 2023; 27(3): 21-33

вой фундамента (см. рис. 3), позволяет управлять величиной отпора грунта в целях снижения напряжений и величины критической нагрузки, а также прогнозировать изменение напряженно-деформированного состояния конструкции в зависимости от потери несущей способности грунта под частью конструкции.

Проведем исследование изменения значения величины критической нагруз-

ки, определяемой выражением (23) в зависимости от параметров, входящих в выражение для определения коэффициента затухания осадок в глубине основания (7).

На рис. 4 представлено изменение коэффициента критической нагрузки при варьировании параметра m, влияющего на распределение коэффициента, характеризующего быстроту затухания осадок в глубине.



Рис. 4. График зависимости коэффициента критической нагрузки от параметра m Fig. 4. Dependence of the critical load factor on the parameter m

На рис. 5 представлено изменение коэффициента критической нагрузки при варьировании параметра  $\eta$  (см. (7)), влияющего на распределение коэффициента, характеризующего быстроту затухания осадок в глубине. При этом моделируются нулевые прочностные характеристики основания под частью конструкции при  $\eta = 2$ .

Из графиков можно сделать вывод о том, что ухудшение свойств грунта даже под небольшой площадью фундамента приводит к значительному снижению критической нагрузки.

На рис. 6 представлены кривые равных значений коэффициента критической нагрузки (24) и напряжений (9) для плиты и пологой оболочки на упругом основании при уменьшении свойств основания под ~ 10% площади. В качестве переменных используется относительная стрела подъёма f/a и относительная толщина  $\bar{t}=h/a$ .

Известия Юго-Западного государственного университета / Proceedings of the Southwest State University. 2023; 27(3): 21-33



Рис. 5. График зависимости коэффициента критической нагрузки от параметра п





Рис. 6. Кривые равных: а – напряжений; б – критических нагрузок

Fig. 6. Curves of equal: a - stresses; 6 - critical loads

Из графиков видно, что при одинаковых значениях коэффициента критической нагрузки и напряжений может быть снижена толщина конструкции. Использование в качестве конструкций фундаментов пологих оболочек дает возможность сэкономить затрачиваемый материал и увеличить несущую способность при неожиданном изменении прочностных характеристик грунта под частью площади.

#### Выводы

Предложенная методика может быть использована для определения и исследования напряженно-деформиро-ванного состояния конструкций фундаментов в виде пологих оболочек на упругом основании при изменении прочностных характеристик части основания. Построенные графики зависимости критической нагрузки от различных параметров пока-

зывают значительное уменьшение несущей способности при уменьшении прочностных характеристик грунта под частью конструкции. Приведенные зависимости иллюстрируют преимущества использования фундаментов в виде пологих оболочек над плитными в случае уменьшения несущей способности части грунта основания, вызванного различными воздействиями.

## Список литературы

1. Maksymuk O. V., Sachuk Yu. V., Yatsyuk S. M. Plane Contact Problems for an Elastic Foundation with Two Bedding Coefficients // Journal of Mathematical Sciences. 2023. https://doi.org/10.1007/s10958-023-06491-1.

2. Straughan W. Analysis of plates on elastic foundations. Texas: Texas Tech University,1980.

3. Wstawska I., Magnucki K., Kędzia P. Stability of three-layered beam on elastic foundation // Thin-Walled Structures. 2022; 175(6): 109208. https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109208.

4. Yangsheng YeShaowei, WeiDegou Cai. Calculation method for internal force and deformation of the prestressed I-beam on the elastic foundation // Frontiers in Earth Science. 2023; 10: 996876. https://doi.org/10.3389/feart.2022.996876.

5. Tunay Uzbay Yelce Tunay, Uzbay Yelce Erdem, Balcı Erdem, Balcı Niyazi Özgür Bezgin Niyazi, Özgür Bezgin. A discussion on the beam on elastic foundation theory // Challenge Journal of Structural Mechanics. 2023; 9(1): 34-47. https://doi.org/10.20528/cjsmec.2023.01.004.

6. Sofiyev A. H., Turan F. 2021. On the nonlinear vibration of heterogenous orthotropic shallow shells in the framework of the shear deformation shell theory // Thin-Walled Structures. 2020 ; 161: 107181. https://doi.org/10.1016/j.tws.2020. 107181.

7. Dao H, Nguyen D, Tran Q. Nonlinear vibration of imperfect eccentrically stiffened functionally graded double curved shallow shells resting on elastic foundation using the first order shear deformation theory // International Journal of Mechanical Sciences. 2014; 80: 16 – 28. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013. 12.009.

8. Nath Y., Jain. R. Non-linear dynamic analysis of shallow spherical shells on elastic foundations // International Journal of Mechanical Sciences. 1983; 25: 409-419.

9. Saurabh Kumar Subhankar, Das Debabrata Gayen Ankita Joshi. Dynamic analysis on axially functionally graded plates resting on elastic foundation // Materials Today: Proceedings. 2022; 69(4): A1-A18, 75-620. https://doi.org/ 10.1016/ j.matpr.2022.08.478.

10. Nie G., Chan C., Yao J., He X. Asymptotic solution for nonlinear buckling of orthotropic shells on elastic foundation // AIAA Journal. 2009; 47-7: 1772-1783. https://doi.org/10.2514/1.43311.

11. Ashis Kumar Dutta, Jagat Jyoti Mandal, Debasish Bandyopadhyay. Application of Quintic Displacement Function in Static Analysis of Deep Beams on Elastic Foundation // Architecture, Structures and Construction. 2022; 2: 257–267.

12. Jingchao Wang, Zheng LiangLi, Wei Yu. 2019. Structural similitude for the geometric nonlinear buckling of stiffened orthotropic shallow spherical shells by energy approach // Thin-Walled Structures. 2018; 138: 430-457. https://doi.org/10.1016/j.tws.2018.02.006.

13. Pankaj Thakur, Monika kumari Sethi. Elastoplastic Deformation in an Orthotropic Spherical Shell Subjected to a Temperature Gradient // Mathematics and Mechanics of Solids. 2020; 25(1):26-34. https://doi.org/10.1177/ 1081286519857128.

14. The influence of temperature differences for the analysis of thin orthotropic cylindrical shell / A. A. Treschev, M. V. Spasskaya, M. B. Shereshevsky, A. A. Bobrishev, L. N. Shafigullin // Scientific Review Engineering and Environmental Sciences. 2017; 26(4): 528 – 537. https://doi.org/10.22630/PNIKS.2017.26.4.50.

15. Tran Quoc Quan, Nguyen Huy Cuong, Nguyen Dinh Duc. Nonlinear buckling and post-buckling of eccentrically oblique stiffened sandwich functionally graded double curved shallow shells // Aerospace Science and Technology. 2019; 90: 169-180. https://doi.org/ 10.1016/j.ast.2019.04.037.

16. Santanu Manna, Rahul Som. Flexural waves at the edge of nonlocal elastic plate associated with the Pasternak foundation // Journal of Vibration and Control. 2022. https://doi.org/10.1177/10775463221141943.

17. Bhattacharjee J., Anas Mubin. Stability of Slab on Elastic Foundation // Part of the Lecture Notes in Civil Engineering book series (LNCE). 2021; 143: 6-31. https://doi.org/10.1007/978-981-33-6969-6\_31.

18. Andreev V. About one way of optimization of the thick-walled shells // Applied Mechanics and Materials. 2012; 166-169; 354-358.

19. Stupishin L.Y., Kolesnikov A.G., Nikitin K.E. Optimal design of flexible shallow shells on elastic foundation // Journal of Applied Engineering Science. 2017; 15(3): 349 - 353. https://doi.org/10.5937/jaes15-14654.

20. Ступишин Л.Ю., Колесников А.Г., Савельева Е.В. Восстановление эксплуатационных характеристик и несущей способности геометрически нелинейных пологих оболочек на упругом основании // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. 2016. № 3 (20). С. 129-134.

21. Stupishin L.Y., Kolesnikov A.G., Nikitin K.E. Variable form forming investigation for flexible shallow shells on circular base // Asian Journal of Civil Engineering. 2017; 8(2):163 - 171.

## References

1. Maksymuk O. V., Sachuk Yu. V., Yatsyuk S. M. Plane Contact Problems for an Elastic Foundation with Two Bedding Coefficients. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023. https://doi.org/10.1007/s10958-023-06491-1. 2. Straughan W. *Analysis of plates on elastic foundations*. Texas: Texas Tech University,1980.

3. Wstawska I., Magnucki K., Kędzia P. Stability of three-layered beam on elastic foundation. *Thin-Walled Structures*. 2022; 175(6): 109208. https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109208.

4. Yangsheng YeShaowei, WeiDegou Cai. Calculation method for internal force and deformation of the prestressed I-beam on the elastic foundation. *Frontiers in Earth Science*. 2023; 10: 996876. https://doi.org/10.3389/feart.2022.996876.

5. Tunay Uzbay Yelce Tunay, Uzbay Yelce Erdem, Balcı Erdem, Balcı Niyazi Özgür Bezgin Niyazi, Özgür Bezgin. A discussion on the beam on elastic foundation theory. *Challenge Journal of Structural Mechanics*. 2023; 9(1): 34-47. https://doi.org/10.20528/cjsmec.2023.01.004.

6. Sofiyev A. H., Turan F. 2021. On the nonlinear vibration of heterogenous orthotropic shallow shells in the framework of the shear deformation shell theory. *Thin-Walled Structures*. 2020; 161: 107181. https://doi.org/10.1016/j.tws.2020. 107181.

7. Dao H, Nguyen D, Tran Q. Nonlinear vibration of imperfect eccentrically stiffened functionally graded double curved shallow shells resting on elastic foundation using the first order shear deformation theory. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2014; 80: 16 – 28. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013. 12.009.

8. Nath Y., Jain. R. Non-linear dynamic analysis of shallow spherical shells on elastic foundations. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1983; 25: 409-419.

9. Saurabh Kumar Subhankar, Das Debabrata Gayen Ankita Joshi. Dynamic analysis on axially functionally graded plates resting on elastic foundation. *Materials Today: Proceedings*. 2022; 69(4): A1-A18, 75-620. https://doi.org/ 10.1016/ j.matpr.2022.08.478.

10. Nie G., Chan C., Yao J., He X. Asymptotic solution for nonlinear buckling of orthotropic shells on elastic foundation. *AIAA Journal*. 2009; 47-7: 1772-1783. https://doi.org/ 10.2514/1.43311.

11. Ashis Kumar Dutta, Jagat Jyoti Mandal, Debasish Bandyopadhyay. Application of Quintic Displacement Function in Static Analysis of Deep Beams on Elastic Foundation. *Architecture, Structures and Construction*. 2022; 2: 257–267.

12. Jingchao Wang, Zheng LiangLi, Wei Yu. 2019. Structural similitude for the geometric nonlinear buckling of stiffened orthotropic shallow spherical shells by energy approach. *Thin-Walled Structures*. 2018; 138: 430-457. https://doi.org/10.1016/j.tws.2018.02.006.

13. Pankaj Thakur, Monika kumari Sethi. Elastoplastic Deformation in an Orthotropic Spherical Shell Subjected to a Temperature Gradient. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2020; 25(1):26-34. https://doi.org/10.1177/ 1081286519857128.

14. Treschev A. A., Spasskaya M. V., Shereshevsky M. B., Bobrishev A. A., Shafigullin L. N. The influence of temperature differences for the analysis of thin orthotropic cylindrical shell. *Scientific Review Engineering and Environmental Sciences*. 2017; 26(4): 528 – 537. https://doi.org/10.22630/PNIKS.2017.26.4.50.

15. Tran Quoc Quan, Nguyen Huy Cuong, Nguyen Dinh Duc. Nonlinear buckling and postbuckling of eccentrically oblique stiffened sandwich functionally graded double curved shallow shells. *Aerospace Science and Technology*. 2019; 90: 169-180. https://doi.org/10.1016/ j.ast.2019.04.037.

16. Santanu Manna, Rahul Som. Flexural waves at the edge of nonlocal elastic plate associated with the Pasternak foundation. *Journal of Vibration and Control*. 2022. https://doi.org/10.1177/10775463221141943.

17. Bhattacharjee J., Anas Mubin. Stability of Slab on Elastic Foundation. *Part of the Lecture Notes in Civil Engineering book series (LNCE)*. 2021; 143: 6-31. https://doi.org/10.1007/978-981-33-6969-6 31.

18. Andreev V. About one way of optimization of the thick-walled shells. *Applied Mechanics and Materials*. 2012; 166-169; 354-358.

19. Stupishin L.Y., Kolesnikov A.G., Nikitin K.E. Optimal design of flexible shallow shells on elastic foundation. *Journal of Applied Engineering Science*. 2017; 15(3): 349 - 353. https://doi.org/10.5937/jaes15-14654.

20. Stupishin L.Yu., Kolesnikov A.G., Savelyeva E.V. Vosstanovlenie ekspluatatsionnykh kharakteristik i nesushchei sposobnosti geometricheski nelineinykh pologikh obolochek na uprugom osnovanii [Restoration of operational characteristics and bearing capacity of geometrically nonlinear shallow shells on an elastic base]. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Tekhnika i tekhnologii = Proceedings of the Southwest State University. Series: Engineering and Technologies*, 2016, no. 3 (20), pp. 129-134.

21. Stupishin L.Y., Kolesnikov A.G., Nikitin K.E. Variable form forming investigation for flexible shallow shells on circular base. *Asian Journal of Civil Engineering*. 2017; 18(2):163 - 171.

Колесников Александр Георгиевич, кандидат	Alexander G. Kolesnikov, Cand. of Sci.
технических наук, доцент, кафедра уникальных	(Engineering), Associate Professor, Southwest
зданий и сооружений, Юго-Западный	State University, Kursk, Russian Federation,
государственный университет,	e-mail: ag_kolesnikov@mail.ru,
г. Курск, Российская Федерация,	SPIN 7667-6685,
e-mail: ag kolesnikov@mail.ru,	ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7874-3646
SPIN 7667-6685,	
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7874-3646	
Иванов Андрей Александрович, аспирант,	Andrey A. Ivanov, Post Graduate Student,
Юго-Западный государственный университет,	Southwest State University,
г. Курск, Российская Федерация,	Kursk, Russian Federation,
e-mail: ag kolesnikov@mail.ru,	e-mail: ag kolesnikov@mail.ru,
ORCID: http://orcid.org/0009-0002-8564-5790	ORCID: http://orcid.org/0009-0002-8564-5790

# Информация об авторах / Information about the Authors