

Оригинальная статья

<https://doi.org/10.21869/2223-1560-2023-27-1-74-89>

Построение LDPC-кодов с использованием модифицированного метода выборки по значимости Коула

В.С. Усатюк ¹ ✉, С.И. Егоров ²

¹ ООО «Т8»
ул. Краснобогатырская, д. 44, стр. 1, г. Москва 107076, Российская Федерация

² Юго-Западный государственный университет
ул. 50 лет Октября, д. 94, г. Курск 305040, Российская Федерация

✉ e-mail: usatiuk@t8.ru

Резюме

Целью исследования является модификация метода выборки по значимости Коула для поиска треппин-сетов (Trapping Sets) в LDPC-коде, позволяющая ускорить их поиск.

Методы. Коул предложил метод поиска треппин-сетов в LDPC-коде путем использования метода выборки по значимости - метода Монте-Карло со смещенной оценкой, провоцирующего отказ алгоритма декодирования в узлах, потенциально содержащихся в треппин-сетах. Его метод позволяет ускорить исследование эффективности LDPC-кодов средней длины в области больших SNR. Модифицированный метод использует свойства автоморфизмов графов Таннера, позволяющие исключить из перебора значительное число символьных узлов. Также модифицированный метод предусматривает упорядоченный перебор по подграфам, содержащим циклы.

Результаты. Предложенный метод позволил ускорить поиск треппин-сетов в PEG(1008, 504) LDPC-коде Маккея в 5027 раз по сравнению с методом Веласкеса-Субрамани, в 43 раза быстрее по сравнению с оригинальным методом Коула. В случае (2640, 1320) LDPC-кода Маргулиса предложенный метод в 28 раз быстрее квазициклического метода Веласкеса-Субрамани и в 134 раза быстрее, чем оригинальный метод Коула.

Заключение. Результат экспериментальных исследований показал возможность при помощи разработанного метода улучшить спектр связности, увеличить кодовое расстояние QC-LDPC кодов. Это позволило уменьшить вероятность ошибки на бит на выходе декодера на порядки при высоких отношениях сигнал/шум в АБГШ-канале.

Ключевые слова: LDPC-код; метод выборки по значимости; спектр связности; кодовое расстояние; метод Коула.

Конфликт интересов: Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Для цитирования: Усатюк В.С., Егоров С.И. Построение LDPC-кодов с использованием модифицированного метода выборки по значимости Коула // Известия Юго-Западного государственного университета. 2023; 27(1): 74-89. <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2023-27-1-74-89>.

Поступила в редакцию 10.02.2023

Подписана в печать 20.03.2023

Опубликована 14.04.2023

Введение

LDPC-коды (Low Density Parity Check Codes), благодаря эффективности декодирования с мягкими метриками методом распространения доверия, нашли широкое применение в системах хранения и передачи информации: флеш-памяти, магнитных дисках, голографической памяти, оптической, беспроводной и спутниковой связи.

В процессе построения LDPC-кодов необходимо оценивать их спектр связности. Нахождение спектра связности для LDPC-кодов является NP-полной задачей, а поиск эффективных алгоритмов ее решения – открытая проблема в теории кодирования.

Для решения этой задачи в работах [1-4] Коул предложил метод, использующий выборку по значимости. Метод предполагает построение дерева поиска и перебор различных вариантов импульсов в символьных узлах дерева. В оригинальном методе не учитывались свойства автоморфизмов графов Таннера (отображение на себя), позволяющие исключить из перебора значительное число символьных узлов. Также не учитывалась возможность упорядоченного перебора по подграфам, содержащим циклы.

В данной работе предлагается модификация метода Коула, осуществляется сравнение ее эффективности с эффективностью методов Веласкеса-Субрамани [5] и эффективностью ориги-

нального метода Коула [4]. На примере построения LDPC-кода с использованием предложенной модификации метода выборки по значимости Коула продемонстрировано повышение надежности исправления ошибок за счет увеличения кодового расстояния и улучшения спектра связности.

Материалы и методы

LDPC-код – это блочный линейный код размерностью k и длиной кодового слова n , задаваемый проверочной матрицей H размерностью $(n-k) \cdot n$, имеющей небольшую плотность отличных от нуля символов [6]. По определению проверочной матрицы для любого кодового слова v LDPC-кода справедливо следующее: $v \cdot H^T = 0$. Каждая строка проверочной матрицы H задает уравнение проверки на четность:

$$\sum_{l=0}^{n-1} v_l \cdot h_{j,l} = 0, \quad (1)$$

где $h_{j,l}$ – элемент проверочной матрицы, j – номер строки проверочной матрицы (номер проверочного уравнения); l – номер символа кодового слова.

Достоинством низкоплотностных кодов является возможность применения субоптимального алгоритма декодирования с мягкими решениями методом распространения доверия (BP, belief-propagation), обладающего значительно большей помехоустойчивостью по сравнению с алгоритмами декодирования с жесткими решениями, сложность кото-

рого растет линейно относительно длины кода. Алгоритм декодирования ВР предусматривает представление LDPC-кода в виде двудольного графа Таннера (пример графа Таннера приведен на рис. 1).

Граф Таннера G имеет два множества вершин. Одно состоит из $m=n-k$

проверочных вершин $\{c_0, c_1, \dots, c_{m-1}\}$, соответствующих m строкам матрицы H , второе – из n кодовых вершин $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$, соответствующих n столбцам матрицы H . Кодовая вершина v_l соединяется ребром с проверочной вершиной c_i в том случае, если $h_{i,l} \neq 0$.

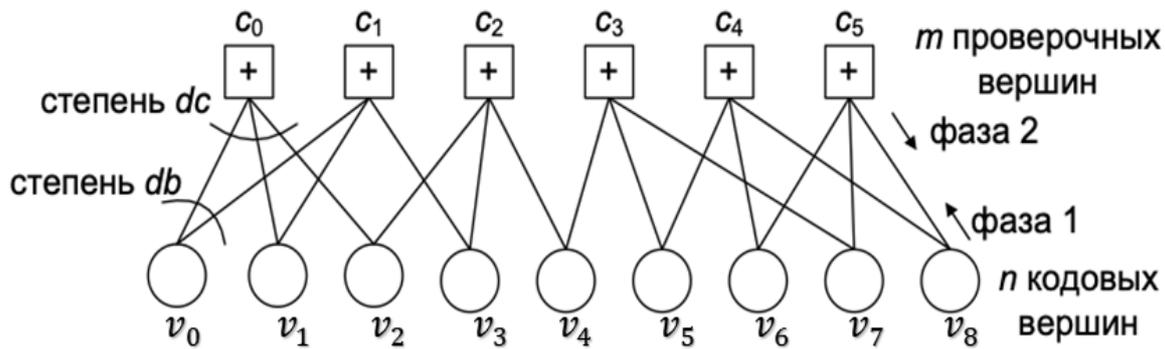


Рис. 1. Двудольный граф двоичного регулярного LDPC кода длины 9

В соответствии с итеративным алгоритмом декодирования ВР получение верных значений символов кодового слова осуществляется в результате многократного обмена сообщениями вершинами графа Таннера. Каждая итерация алгоритма содержит две фазы. В фазе 1 обновляются сообщения проверочных вершин на основе анализа сообщений кодовых вершин; в фазе 2 – сообщения кодовых вершин на основе анализа сообщений проверочных вершин.

На эффективность декодирования методом распространения доверия отрицательно влияет наличие циклов в графе Таннера, образующих треппин-сету (Trapping set, TS). Треппин-сету образуют в графе Таннера $TS(a, b)$ -подграфы, со-

стоящие из a символьных (кодовых) узлов, b из которых инцидентны проверочным узлам с нечетными степенями [4,7]. Эти подграфы обуславливают ошибку декодирования в методе распространения доверия. В случае, если вектор ошибки изменит значения в символьных узлах, инцидентных нечетному числу проверок, то при мягком декодировании методом распространения доверия ошибка не будет скорректирована, даже если она корректируема в соответствии с дистантными свойствами кода. На рис. 2 изображены два таких подграфа. Левый подграф треппин-сета $TS(5,5)$ образован пересечением трех циклов длины 8, правый подграф треппин-сета $TS(5,3)$ образован одним циклом длины 8.

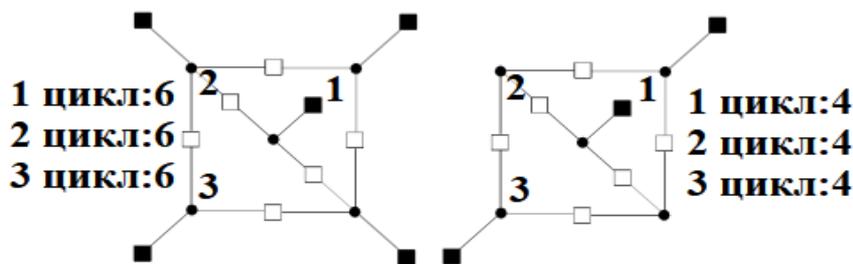


Рис. 2. Топологическое представление подграфов треппин-сетов $TS(5,5)$ (слева) и $TS(5,3)$ (справа), ● – символный узел, □ – проверочный узел с четной степенью, ■ – проверочный узел с нечетной степенью

Треппин-сети можно упорядочить при помощи простой модели их вклада в вероятность ошибки, исходя из следующих соображений: $TS(a,b)$ в процессе декодирования при некотором отношении сигнал-шум через b -символьных узлов, инцидентных нечетным проверкам, вызовет отказ метода декодирования в a -символьных узлах. В результате $\forall TS_1(a_1, b_1)$, $TS_2(a_2, b_2)$ вероятность отказа декодирования для треппин-сета TS_1 будет больше вероятности отказа декодирования для треппин-сета TS_2 , $P_{error}(TS_1) > P_{error}(TS_2)$, если выполняется отношение $b_1/a_1 < b_2/a_2$. В аппаратных реализациях мягкого итеративного де-кодирования модель отказа треппин-сетов более сложная, так как на нее влияет планировщик декодера, использование для представления данных фиксированной точки (fix-point) и другие параметры декодера [8-10].

Важной характеристикой LDPC-кода является приближенный спектр связности (ACE Spectrum) графа Таннера. Спектр связности представляется в виде вектора:

$$ACE(H) = (ACE_{4,0}(VN), ACE_{4,1}(VN), \dots, ACE_{i,j}(VN), \dots, ACE_{k,m}(VN)),$$

где $ACE_{i,j}(VN)$ – количество символьных узлов, содержащихся в цикле длины i со значением связности j , VN – подмножество символьных узлов графа Таннера, образующих циклы длины $i \in \{4, 6, \dots\}$. Значение связности (ACE, Approximated Cycle Extrinsic Message Degree) вычисляется для символьных узлов, содержащихся в подграфе, образованном циклом $v_i \in C$,

$$ACE(C) = \sum_{v \in C} (d(v) - 2),$$

где $d(v)$ – степень инцидентности символьного узла [11]. Код с лучшим спектром связности при одинаковом спектре кода при использовании декодирования методом распространения доверия обеспечивает лучшую помехоустойчивость. Декодированию этого кода не будут мешать псевдокодовые слова, обусловленные TS . Например, треппин-сет $TS(5,3)$ дает большую вероятность отказа декодирования, чем треппин-сет $TS(5,5)$, так как спектр связности треппин-сета $TS(5,3)$ содержит 3 цикла

длины восемь со значением 4, тогда как спектр связности треппин-сета $TS(5,5)$ содержит 3 цикла длины восемь со значением 6, (см. рис. 2). Увеличение значения первого ненулевого элемента спектра связности будет приводить к уменьшению вероятности отказа декодирования треппин-сета.

Кодовому слову минимального веса, определяющему кодовое расстояние LDPC-кода, соответствует треппин-сет $\min_a TS(a,0)$, $d_{\min} = a$. Таким образом, треппин-сеты вида $TS(a,0)$ соответствуют кодовым словам LDPC-кода [12]. Треппин-сеты это обобщение весового спектра кода в случае мягкого итеративного декодирования методом распространения доверия. Улучшая спектр связности для циклов, соответствующих $\min_a TS(a,0)$, мы улучшаем кодовое расстояние LDPC-кода.

В работе [13] была продемонстрирована NP сложность перечисления треппин-сетов в LDPC-кодах. Поэтому для поиска треппин-сетов и других структур, обуславливающих ошибку в методе декодирования распространением доверия, целесообразно использовать статистические методы выборки по значимости, не требующие нахождения всех треппин-сетов.

Выборка по значимости (Importance Sampling - IS) — один из методов уменьшения дисперсии случайной величины, который используется для улучшения сходимости процесса моделирования случайной величины мето-

дом Монте-Карло. Он применяется для повышения эффективности имитационного моделирования процессов исправления ошибок в системах хранения информации и телекоммуникаций, ускорения оценки вероятности статистически редких событий, возникающих в процессе декодирования помехоустойчивых кодов [7,14,15].

В работах [1-4] Коул предложил метод поиска треппин-сетов в LDPC-коде, путем использования метода выборки по значимости - метода Монте-Карло со смещенной оценкой, провоцирующего отказ алгоритма декодирования в узлах, потенциально содержащихся в треппин-сетах. Его метод позволяет ускорить исследование эффективности LDPC-кодов средней длины в области больших SNR.

Метод Коула предусматривает выполнение трех шагов.

На первом шаге с помощью декодера ищутся доминантные ошибочные события. На втором шаге вносится детерминированный шум в направлении этих событий и находится точка, соответствующая отказу алгоритма декодирования. На этом шаге проверяется действительно ли событие доминантно (т.е. вызывает отказ декодера). На третьем шаге используется процедура выборки по значимости [4] для определения малого значения BLER LDPC-кода.

Рассмотрим метод Коула подробнее.

Во множестве кодовых узлов в графе Таннера можно выделить два под-

множества: подмножество узлов с провоцирующими отказ импульсами S_2 и подмножество узлов S_1 заданного веса Хэмминга w_H . Поиск треппин-сетов осуществляется в подмноестве S_2 узлов, образующих дерево (рис. 3).

Для каждой кодовой вершины v_i графа Таннера степени инцидентности не более t строится дерево глубины t ,

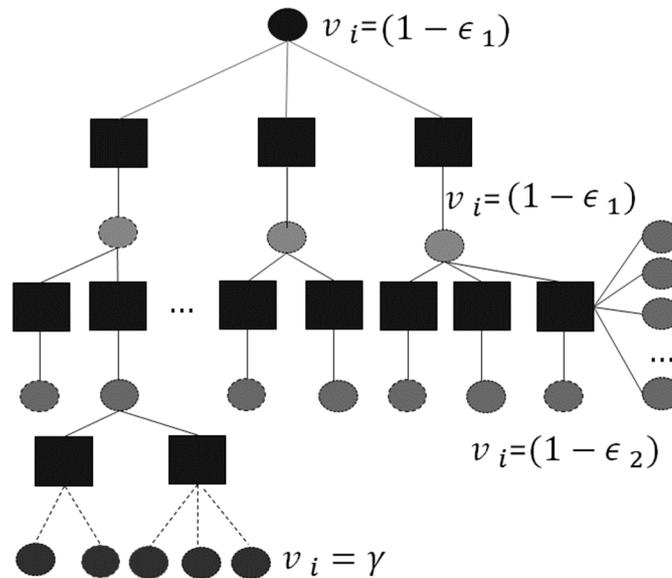


Рис. 3. Пример S_2 дерева поиска треппин-сетов

В предложенном Коулом способе формирования дерева количество элементов в множествах для LDPC-кода длины n вычисляется по формулам:

$$|S_1| = \binom{n}{d_v + 1} \text{ и } |S_2| = n(d_c - 1)^{d_v}.$$

Например, для регулярного кода (4,20) кодовой длины $n = 2560$, $d_v = 4$, $d_c = 20$:

$$|S_1| \approx 9.13 \times 10^{14} \text{ и } |S_2| = 333621760.$$

Число узлов, требующих вызова декодера с импульсами, провоцирующими отказ, на 6 порядков меньше числа узлов, заданного веса w_H . Именно свойство низ-

на котором запускается метод декодирования распространением доверия с импульсами, провоцирующими отказ декодирования. Число кодовых узлов на глубине дерева 2 равно $d_v(d_v - 1)(d_c - 1)$, где d_v – степень кодового узла в графе Таннера; d_c – степень проверочного узла.

кой плотности LDPC-кода в сочетании с применением метода распространения доверия позволяет значительно уменьшить сложность поиска подграфов треппин-сетов.

Сообщения в кодовых узлах v_i подграфов с провоцирующими отказ импульсами на глубине дерева t определяются следующим образом:

$$v_i^{t-1} = 1 - \epsilon_{t-1}, \quad v_i^t = \gamma, \quad (2)$$

где γ – параметр вероятности ошибки на последнем уровне; ϵ_{t-1} – параметр веро-

ятности импульсной ошибки на $t-1$ уровне.

Логарифмы правдоподобия в методе распространения доверия вычисляются по формуле $LLR_{v_i} = f \times v_i$, где f – значение логарифма правдоподобия соответствующего канала и типа модуляции в имитационном моделировании. В методе поиска треппин-сетов применяется нулевое кодовое слово. При малых значениях ε декодер успешно исправит все ошибки в дереве поиска и получит нулевое кодовое слово. Когда ε будет достаточно большим, декодер не сможет исправить ошибку, и на основании жесткого решения, $LLR_{v_i} < 0$, в кодовых узлах, содержащих ненулевое значение символа, будет осуществляться проверка подграфа согласно определению треппин-сета. Выбор параметров ошибки γ и ε_{t-1} обычно осуществляется случайными бросками из соображений максимизации отказа декодирования для $S_{calibrate} \ll |S_2|$. Отметим, что правильный выбор γ , ε_{t-1} влияет на параметры a , b найденного треппин-сета $TS(a, b)$.

Выборка по значимости используется Коулом следующим образом.

В качестве несмещенной оценки вероятности блочной ошибки декодирования с мягкими метриками можно использовать выборочное среднее [16, с. 42]:

$$\overline{\text{Exp}}(x_i) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i,$$

где N – объем выборки случайной величины x_i , $x_i \in \{0, 1\}$, $x_i = 1$ – в случае

ошибки декодирования, $x_i = 0$ – в случае успешного декодирования.

В случае получения генеральной совокупности, например путем увеличения числа N экспериментов, оценка математического ожидания стремится к истинному значению со скоростью $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

Для оценки вероятности блочной ошибки декодирования $BLER$ с доверительным интервалом $\beta = 95\%$ и относительной ошибкой $er_{rel} = 25\%$ потребуется осуществить по меньшей мере $N = \left\lceil \frac{(t_{\beta} \times er_{rel}^{-1})^2}{BLER} \right\rceil = \left\lceil \frac{(1.96 \times 4)^2}{BLER} \right\rceil$ экспериментов, где t_{β} – значение квантиля стандартного нормального распределения при значении доверительного интервала β , [16, с. 56] Например, при $BLER = 10^{-10}$ потребуется декодировать 61.47×10^{10} кодовых слов.

С целью ускорения моделирования Коул предложил осуществлять выборку случайных величин из другого смещенного распределения y_i , провоцирующего отказ декодирования:

$$\overline{\text{Exp}}(x_i) \approx \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \omega(y_i),$$

где ω – пространство метода выборки по значимости; L – объем выборки случайной величины y_i , $L \ll N$, $y_i \in \{0, 1\}$; $y_i = 1$ – в случае ошибки декодирования; $y_i = 0$ – в случае успешного декодирования. Для расчета функции плотности вероятности исходного распределения через новое распределение, для АБГШ-канала предложено применять взвешенную сум-

му плотностей вероятностей со смещенным средним:

$$f^*(y) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^2} e^{-\frac{|y-\mu_i|^2}{2\sigma^2}},$$

где M – объем выборки случайной величины y ; σ – дисперсия шума; μ_i – математические ожидания, равные нулю для всех значений мягких метрик, кроме треппин-сетов и слов малого веса.

В соответствии с методом Коула моделируется передача нулевого кодового слова с зашумленными мягкими метриками. Путем зашумления мягких метрик (логарифмов правдоподобия) символьных узлов v_i осуществляется сдвиг математического ожидания распределения Гаусса к нулю. После получения списка треппин-сетов в результате отказа декодирования и проверки условия на циклы в соответствии с определением треппин-сетов выделяются узлы треппин-сета и осуществляется оценка его вклада в вероятность ошибки декодера путем вычисления обобщенного Хэммингова веса треппин-сета ω .

Весом треппин-сета ω называется вероятность перехода из нулевого кодового слова x_1 в треппин-сет x_2

$$P(x_1 \rightarrow x_2) = Q(\sqrt{2\omega SNR}),$$

где Q – q -функция, SNR – отношение сигнал-шум. Вес треппин-сета ω , в отличие от веса Хэмминга, не является не целым числом.

Для расчета вероятности блочной ошибки применяется неравенство Буля (Union Bound). Для всех найденных

слов малого веса (TS(a,0) и треппин-сетов (TS(a,b)), [4,17]:

$$BLER \approx \sum Num_{\omega} Q(\sqrt{2\omega SNR}),$$

где Num_{ω} – число кодовых, псевдокодовых слов веса ω .

Метод выборки по значимости Коула является декодеро-зависимым методом, учитывающим влияние декодера на треппин-сеты, что позволяет значительно ускорить время поиска за счет исключения треппин-сетов, чей вклад в вероятность ошибки незначителен. Однако в силу декодеро-зависимости, он проигрывает по полноте результатов (получению всех треппин-сетов в коде) методу линейного программирования Веласкеса-Субрамани.

Вычислительная сложность метода Коула определяется его первым шагом. Для ускорения работы метода предлагаются следующие модификации этого шага.

Первая предложенная модификация основана на свойствах квазициклических LDPC-кодов, а именно эквивалентности свойств символьных вершин графа, соответствующих блочным матрицам циркулянтов размера $z \times z$, [18,19]. Это позволяет уменьшить количество элементов в множестве $|S_2|$ в z раз и ускорить работу метода примерно в z раз.

Вторая модификация заключается в учете при формировании массива $|S_2|$ требования принадлежности кодовых узлов циклам либо их пересечениям и свойств треппин-сетов TS(a,b).

Пусть для множества кодовых узлов VN_i множество TS_{cycle} будет объединением кодовых узлов VN_i и кодовых узлов, добавляющих новый цикл длины $cycle$ в это множество. Тогда пользуясь определением треппин-сета $TS(a,b)$ как подграфа, состоящего из a кодовых узлов, содержащих цикл его пересечения, b из которых инцидентны проверочным узлам с нечетными степенями, мы можем ввести отношение порядка для треппин-сетов:

$$TS(a,b) < TS'(a',b') : b = b', a \leq a'.$$

Поскольку отказ декодера в результате наличия циклов в графе возникает через $\lceil iter/2 \rceil$ итераций, можно сформировать упорядоченные множества S_2 , начиная от минимальной длины цикла в графе $girth$ (обхвата графа), до максимальной длины цикла max ,

определенной необходимым числом итераций в методе распространения доверия.

В результате получим:

$$S_2 \lceil_{girth/2} \rceil, S_2 \lceil_{(girth+2)/2} \rceil, \dots, S_2 \lceil_{max/2} \rceil. \quad (3)$$

Если количество кодовых символов с ненулевым значением подмножества с соответствующим числом итераций метода распространения доверия равно нулю, но нет необходимости осуществлять дальнейшие итерации, переходим к следующему множеству. Принадлежность кодового узла циклу может быть эффективно вычислена, используя метод быстрого подсчета числа циклов в графе Таннера LDPC-кода по свойствам степени матрицы инцидентности [20]. Пример применения модифицированного метода для вычисления принадлежности узлов графа Таннера циклам длины 4 и 6 для квазициклического LDPC-кода (2560, 2048) приведен в табл.1.

Таблица 1. Среднее число циклов длины 4, 6, проходящих через кодовые и проверочные символы квазициклического LDPC-кода (2560, 2048) с проверочной матрицей размера 4 на 20

циклы 6		3,7	5	5	7	8,7	7,7	11	11	7	9	7,7	6,7	9,3	9,3	7,3	9,3	9	9	9	10,7
	циклы 4	0,5	0	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
39,7	0,5	34	1	81	20	0	0	0	8	54	0	44	111	28	99	75	81	81	42	30	119
38,3	0	-1	85	36	18	113	59	29	58	123	38	3	91	113	1	0	89	72	44	78	90
42,3	0,5	122	-1	41	71	10	85	110	66	99	77	109	100	0	43	33	124	26	98	74	28
42,7	0	109	103	-1	75	36	12	58	127	53	114	1	18	48	116	120	15	51	63	95	68

Формируя множество вершин $|S_2|$ начиная от кодовых символов, содержащихся в максимальном числе циклов длины 4, 6, 8, ..., мы можем осуществить дальнейшее уменьшение множества вершин $|S_2|$. Например, кодовые

узлы участвуют в циклах длины 4 лишь в двух (1 и 3) из 20 кодовых вершин, в циклах длины 6, две (7 и 8) кодовые вершины из 20 содержатся в максимальном числе циклов (11).

Используя среднее число итераций, сравнительно малое по сравнению с

максимальным числом итераций, достаточное для сходимости декодера на требуемом уровне отношения сигнал-шум SNR, мы можем отбросить большую часть подмножеств массива $|S_2|$, уменьшая его на несколько порядков. Если подмножество не было успешно декодировано, оставшиеся итерации осуществляются на значительно меньшем числе кодовых узлов. Такой подход позволяет уменьшить число обрабатываемых узлов, а также упрощает многопоточную реализацию, управление потреблением оперативной памяти в соответствии с аппаратными ограничениями.

В алгоритме Коула предложено хранить историю процесса декодирования по каждой из итераций первого шага (“It is important to have a definition of a TS which takes into account the entire history of the decoding process and not just the final state”, страница 8). Необходимость хранения полного списка результатов итераций декодирования аргументируется необходимостью быстрой оценки веса псевдокодированного слова треппин-сети. Однако на практике процедура оценки псевдокодированного слова – гораздо менее вычислительно затратная часть алгоритма по сравнению с необходимостью выполнения всех итераций на всех возможных подграфах, потенциально содержащих треппин-сет, на первом шаге. Более того декодеры, применяемые на практике, чаще всего применяют алгоритм ранней остановки декодирования для снижения энергопо-

требления и соответственно раньше завершают процесс декодирования.

Таким образом, предложенная модификация метода Коула содержит следующие изменения:

1. Для квазициклического кода число кодовых узлов графа Таннера уменьшается в Z раз (Z – размер циркулянта). Все узлы в циркулянте ведут себя одинаково в силу автоморфизмов двудольного Таннер-графа.

2. С учетом определения треппин-сети новый узел добавляется в множество LLR_{TS} , только если он образует цикл с остальными узлами в множестве (п.8).

3. Нет необходимости осуществлять максимальное количество итераций декодера и хранить полную историю декодирования.

Модифицированный алгоритм Коула для поиска треппин-сетов

Вход: Проверочная матрица квазициклического LDPC-кода с числом символьных узлов, уменьшенных в Z раз (Z – размер циркулянта), гиперпараметры $\gamma, \epsilon_1, \epsilon_2$, максимальное число итераций алгоритма декодирования $iter_{max}$, среднее число итераций алгоритма декодирования $iter_{avg}$.

Выход: Список треппин-сетов

$TS_{list} = \{TS_1(a,b): v_1, v_2, \dots, v_a; TS_2(a,b): v_1, v_2, \dots, v_a; \dots\}$, содержащий параметры треппин-сетов (a, b) и списки символьных узлов их образующих.

1. $TS_{list} = \{0\}$.

2. Выполнять в цикле (можно параллельно) по всем комбинациям S_2 множества деревьев с ошибками веса w_H .

3. Выполнять в цикле по итерациям графа декодирования $j = \text{iter}_{\text{avg}} \dots \text{iter}_{\text{max}}$:

4. Присваиваем значения логарифмов правдоподобия w_H символьным узлам кодового слова веса $LLR_{TS}(S_2) = \text{chan}_{LLR} \times (1 - \varepsilon_i)$, оставшимся $n - w_H$ символьным узлам кодового слова присваиваем значения $LLR_{Code/TS}(S_2) = \text{chan}_{LLR} \times \gamma$.

5. Выполняем декодирование с j итерациями на основе проверочной матрицы H с логарифмами правдоподобия $LLR_{TS}, LLR_{Code/TS}$.

6. Если в результате декодирования с j итерациями получаем нулевой синдром $Hx = 0$ и исходное сообщение, переходим к шагу 9.

7. Если в результате декодирования получаем нулевой синдром $Hx = 0$ и неверное сообщение, то найдено слово малого веса $TS(a, 0)$. Вносим его в список: $TS_{list} = TS_{list} \cup TS(a, 0)$ и записываем соответствующие символьные узлы графа: v_1, v_2, \dots, v_a .

8. Если в результате декодирования получаем ненулевой синдром $Hx \neq 0$, осуществляем проверку в соответствие с определением треппинг-сета. Если обнаружен треппинг сет, вносим его в список $TS_{list} = TS_{list} \cup TS(a, b)$ и записываем символьные узлы графа треппинг-сета (псевдокодированного слова): v_1, v_2, \dots, v_a .

9. Конец цикла по итерациям графа декодирования.

10. Конец цикла по комбинациям S_2 .

11. Вернуть TS_{list} .

Алгоритм поиска треппинг-сетов имеет два гиперпараметра $\gamma \in (0, 1]$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$: $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, ε_1 – ошибка в узлах первого уровня дерева, ε_2 – ошибка второго

уровня дерева (см. рис. 3). Для коротких кодов $n \leq 4000$, $\varepsilon_1 \in [2\varepsilon_2, 8\varepsilon_2]$, для длинных кодов $\varepsilon_1 \in [1.1\varepsilon_2, 2\varepsilon_2]$. На практике для кодов с высоким значением спектром связности, обхватом ≥ 6 и $EMD \geq 3$, полученных в результате применения метода имитации отжига и увеличения кодового расстояния при помощи геометрии чисел [21, 22], чаще всего $\gamma \in [0.15, 0.7]$. Для кода с распределением весов столбца $\text{var}_{\text{deg}} = (d_{\text{max}}, d_{\text{max}-1}, \dots, d_{\text{min}-1}, d_{\text{min}})$ достаточно рассмотреть

$$w_H = [d_{\text{max}} + d_{\text{min}}, d_{\text{max}} + 2 * \text{card} \left[\frac{\text{var}_{\text{deg}}}{d_{\text{max}}} \right] + 1],$$

где d_{max} – максимальный вес столбца, d_{min} – минимальный вес столбца, $\text{card}[\text{var}_{\text{deg}}/d_{\text{max}}]$ – число различных распределений весов столбца за исключением максимального веса.

Логарифмы правдоподобия в символьных узлах с импульсной ошибкой веса w_H равны $LLR_{TS} = \text{chan}_{LLR} \times (1 - \varepsilon_i)$, например, для фазовой модуляции (BPSK) на АБГШ-канале (AWGN-channel) $\text{chan}_{LLR} = \frac{2y}{\sigma^2}$, y – принятая точка модуляционного созвездия, σ – дисперсия шума АБГШ-канала.

Логарифмы правдоподобия в узлах без импульсной ошибки равны $LLR_{Code/TS} = \text{chan}_{LLR} \times \gamma$. Чем больше ε , тем больше вероятность отказа декодера с мягкими метриками в результате треппинг-сетов.

Параметр γ определяет возможность символьных узлов оставшегося подграфа, образованного узлами, не содержащими треппинг-сет, исправить ошибку, вызванную его узлами.

Пример результатов вывода данных алгоритмом: трэппин-сет (11, 10): $v_1=301$, $v_2=1167$, $v_3=1911$, $v_4=1947$, $v_5=3067$, $v_6=4272$, $v_7=4300$, $v_8=6682$, $v_9=7426$, $v_{10}=8336$, $v_{11}=9295$. Остальные символные узлы квазициклического кода получаются путем Z-1 циклических сдвигов узлов $v_1 - v_9$.

Для вычисления вероятности ошибки на бит применяется линейная модель Шлегеля-Занга, [23].

Оценим требования к ОЗУ для реализации предложенного метода. Проверочные матрицы квазициклических LDPC-кодов, приведенные в следующем разделе, содержат 77 ненулевых циркулянтов размера 128 ($z=128$) в матрице размером 4 на 20. Для этих кодов потребовалось 16 Гб памяти для поиска трэппин-сетов $TS(a,b)$, $b_{\max} \leq 29$. Умеренное использование ОЗУ позволяет применять графические ускорители GPU NVIDIA TITAN RTX и платы акселераторов на FPGA. NVIDIA TITAN RTX обеспечивает ускорение от 2 до 19 раз по сравнению с многоядерными (16 ядер) микропроцессорами. Современные платы FPGA (например, BittWare XUP-P3R) могут быть оснащены высокоскоростной оперативной памятью (до 512 Гбайт DDR4) и позволяют выполнить большую часть многоэтапной обработки на устройстве FPGA, обеспечивая ускорение по сравнению с GPU от 1,5 до 25 раз.

Результаты и их обсуждение

Сравнение эффективности предложенного метода с оригинальным методом Коула и методом Веласкеса-Субрамани приведено в табл. 2.

Предложенный метод позволил ускорить поиск трэппин-сетов в LDPC-коде Маккея PEG(1008, 504) в 5027 раз по сравнению с методом Веласкеса-Субрамани, в 43 раза по сравнению с оригинальным методом Коула. В случае LDPC-кода Маргулиса (2640, 1320) предложенный метод в 28 раз быстрее квазициклического метода Веласкеса-Субрамани и в 134 раза быстрее оригинального метода Коула.

Для демонстрации эффективности метода были построены два нерегулярных QC-LDPC-кода (2560, 2048) с базовой матрицей размера 4x20. Первый код А имеет обхват 4 ($(d_{upper}=40)$), второй код Б - обхват 6 ($(d_{upper}=50)$). Точные спектры связности графа Таннера для этих кодов: (4,2)=1;0,(4,3)=0;0,(4,4)=0;0,(6,2)=2;0,(6,3)=0;0,(6,4)=1;0,(6,5)=35;6016,(6,6)=125;14720, (8,2)=1;0, (8,3)=2;0, (8,4)=9;256, (8,5)=28;5248, (8,6)=242;33280, (8,7)=2122;276608, (8,8)=5381;703232, (10,2)=2;0, (10,3)=2;0, (10,4)=18;256. Пара в скобках обозначает длину цикла и значение EMD, пара в правой части равенства обозначает число циклов для кодов А и Б, соответственно.

Таблица 2. Время, необходимое для поиска треппин-сетов TS(a,b) в соответствующих LDPC-кодах, в секундах

TS(a, b)	LDPC-код Маккея PEG(1008, 504) /			LDPC-код Маргулиса (2640, 1320) /		
	BC метод [5]	Предложенный метод	Метод Коула [4]	BC метод [5]	Предложенный метод	Метод Коула [/
a=5	53,42	99,5 (1-поток), 7 (32-потока)	4320 (1,2 часа)	520,95	0,97	29520 (8.2 часа)
a=6	31,74			4373,78		
a=7	984,51			716,04		
a=8	4,1			18843,19		
a=9	4864,37			13504,13		
a=10	8143,11					
a=11	485919,5					
a=12	245,1					
...						
a=18						

На основе предложенного метода был получен список треппин-сетов в построенных кодах. Табл. 3 демонстрирует, как улучшение спектра связности

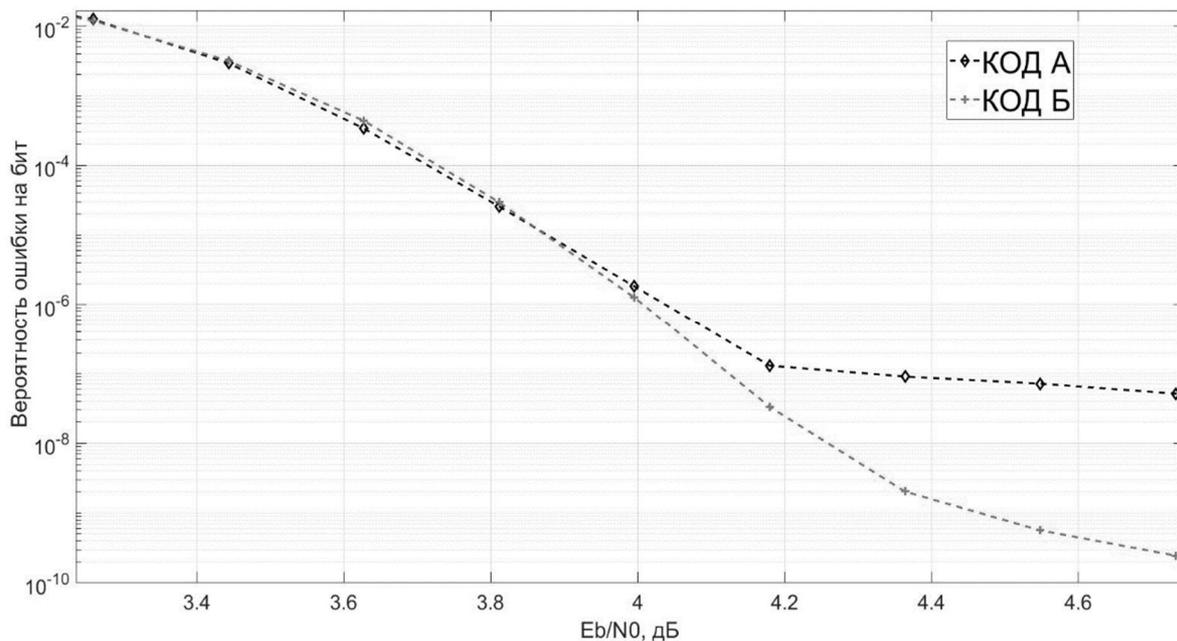
и кодового расстояния приводит к уменьшению количества треппин-сетов и тем самым к повышению эффективности декодирования кода (рис.4).

Таблица 3. Сводный список треппин-сетов TS(a, b) для кода А; кода Б

	b=2	b=3	b=4	b=5	b=6	b=7	b=8	b=9
a=2	128;0	0;0	0;0	0;0	0;0	0;0	0;0	0;0
3	128;0	0;0	0;0	0;0	0;0	0;0	0;0	0;0
4	0;0	0;0	520;79	0;0	0;0	0;0	0;0	0;0
5	0;0	6;0	344;5	393;174	0;0	0;0	0;0	0;0
6	0;0	3;0	196;12	671;267	3728;2700	0;0	0;0	0;0
7	0;0	5;0	105;35	744;323	5109;3218	12434;14341	0;0	0;0
8	0;0	0;0	98;46	915;337	6959;4302	15427;14497	22615;31041	0;0
9	0;0	2;0	130;14	888;467	5102;3481	18550;16503	24858;24757	29106;37520
10	0;0	2;0	113;21	677;451	3492;2526	11791;9403	30707;28995	30834;32280
11	0;0	3;0	102;32	510;350	2303;1804	7106;5786	16947;15297	31194;30175
12	0;0	14;0	73;20	383;234	1482;1135	4125;3417	9075;7902	17218;14947

Таблица 3. Сводный список треппин-сетов TS(a, b) для кода А; кода Б

	b=2	b=3	b=4	b=5	b=6	b=7	b=8	b=9
13	0;0	8;0	58;24	243;164	849;673	2194;1743	4779;3738	9119;7014
14	1;0	7;2	29;19	165;81	519;326	1184;841	2360;1590	4735;3131
15	0;0	3;0	18;8	77;38	260;137	575;345	1195;643	2388;1340
16	0;0	2;0	8;2	40;15	112;65	245;125	519;274	1059;446
17	0;0	1;0	2;2	13;3	53;21	111;39	252;85	482;185
18	0;0	0;0	2;0	2;1	16;7	48;8	131;31	223;73
19	0;0	0;0	2;0	2;0	4;1	21;8	53;10	103;28
20	0;0	0;0	0;0	1;0	2;1	14;0	19;2	44;9
21	0;0	2;0	0;0	0;0	2;0	8;0	5;1	15;1
22	0;0	0;0	0;0	0;0	1;0	3;0	4;0	9;1
23	0;0	0;0	0;0	0;0	0;0	0;0	1;0	1;1
24	0;0	0;0	0;0	0;0	0;0	0;0	0;1	1;0

**Рис. 4.** Результаты моделирования LDPC-кодов на 20 итерациях Layered Normalized Min-Sum декодера с фиксированной точкой (4,4,6), двоичная фазовая модуляция

В результате улучшения спектра связности кода Б вероятность ошибки на бит уменьшилась на два порядка при высоких отношениях сигнал/шум.

Выводы

В статье предложен модифицированный метод выборки по значимости

Коула для поиска треппин-сетов. Предложенный метод значительно ускорил

поиск треппинг-сетов по сравнению с ранее предложенными методами. На примере построения LDPC-кодов продемонстрировано, как улучшение спектра связности, кодового расстояния приводит

к уменьшению числа треппинг-сетов и соответствующему повышению энергетического выигрыша в области высоких отношений сигнал/шум.

Список литературы

1. Cole C. A., et al. Regular $\{4, 8\}$ LDPC Codes and Their Low error Floors // MILCOM. 2006. P. 1-7
2. Cole C. A., et al. Analysis and Design of Moderate Length Regular LDPC Codes with Low Error Floors // 40th CISS. 2006. P. 823-828.
3. Cole C. A. Error floor analysis for an ensemble of easily implementable irregular (2048, 1024) LDPC codes // MILCOM. 2008. P. 1-5.
4. Cole S. A., Wilson E. H., Giallorenzi T. A general method for finding low error rates of LDPC codes. URL: arxiv.org/abs/cs/0605051. (date of treatment: 14.04.2022)
5. Velasquez A., et al. Finding Minimum Stopping and Trapping Sets: An Integer Linear Programming Approach // In: Lee J., Rinaldi G., Mahjoub A. (eds) Comb. Optim. ISCO 2018. Lect. Notes in Comp. Science. Vol. 10856. P.. 402–415
6. Усатюк В.С., Егоров С.И. Устройство для оценки кодового расстояния линейного блочного кода методом геометрии чисел // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. 2017. № 4 (25). С. 24-33.
7. Richardson T. J. Error floors of LDPC codes // in 41st Annual Allerton Conference on Comm., Control and Computing. Oct. 2003. P. 1426–1435.
8. Improved min-sum decoding algorithms for irregular LDPC codes / J. Chen, R. M. Tanner, C. Jones, Y. Li // ISIT. 2005. P. 449-453.
9. Two-dimensional correction for min-sum decoding of irregular LDPC codes / J. Zhang, M. Fossorier, D. Gu, J. Zhang // in IEEE Communications Letters. March 2006. Vol. 10. № 3. P. 180-182.
10. Zhang S., Schlegel C. Controlling the Error Floor in LDPC Decoding // in IEEE Transactions on Comm. 2013. Vol. 61(9). P. 3566-3575.
11. Tian T., et al Selective avoidance of cycles in irregular LDPC code construction// in IEEE Trans. on Comm. 2004. Vol. 52. № 8. P. 1242-1247.
12. Vasić B., et al Trapping set ontology // 47th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing (Allerton). 2009. P. 1-7.
13. McGregor A., Milenkovic O. On the Hardness of Approximating Stopping and Trapping Sets in LDPC Codes // IEEE ITW. 2007. P. 248-253.

14. Jeruchim M. Techniques for estimating the bit error rate in the simulation of digital communication systems // *IEEE Journal on selected areas in communications*. 1984. Vol. 2. № 1. P. 153–170.
15. Smith P. J., Shafi M., Gao H. Quick simulation: A review of importance sampling techniques in communication systems, // *IEEE J.Select.Areas Commun.* 1997. Vol. 15. P. 597–613.
16. Компьютерное моделирование / В.М. Градов, Г.В. Овечкин, П.В. Овечкин, И. В. Рудаков. М.: КУРС: Инфра-М, 2020. 264 с.
17. Vasić B., Chilappagari S.K., Nguyen D. V. Chapter 6 - Failures and Error Floors of Iterative Decoders, Editor(s): Declercq D., Fossorier M., Biglieri E., Academic Press Library in Mobile and Wireless Comm. 2014. P. 299-341
18. Tanner R. M., Fuja T. E., Sridhara D. A Class of Group Structured LDPC Codes // *Proceedings 6th ISCTA, Ambleside, England, July 2001*. P.365-370.
19. Fossorier M. P. C. Quasi-cyclic low-density parity-check codes from circulant permutation matrices // *IEEE Trans. Inf. Theory*. Aug. 2004. Vol. 50. № 8. P. 1788–1793.
20. Halford T. R., Chugg K. M. An algorithm for counting short cycles in bipartite graphs // in *IEEE Trans. on Inform. Theory*. 2006. Vol. 52(1). P. 287-292.
21. Usatyuk V., Vorobyev I. Simulated Annealing Method for Construction of High-Girth QC-LDPC Codes // *41st International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP)*. Athens, Greece, 2018.
22. Usatyuk V., Egorov S., Svistunov G. Construction of Length and Rate Adaptive MET QC-LDPC Codes by Cyclic Group Decomposition // *IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS)*. Batumi, Georgia, 2019.
23. Schlegel C., Zhang S. On the Dynamics of the Error Floor Behavior in (Regular) LDPC Codes // *IEEE Transactions on Information Theory*. 2010. Vol. 56. № 7. P. 3248-3264.

Информация об авторах

Усатюк Василий Станиславович, кандидат технических наук, главный инженер департамента исследований и разработок, ООО «Т8», г. Москва, Российская Федерация, e-mail: usatiuk@t8.ru

Егоров Сергей Иванович, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры вычислительной техники, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Российская Федерация, e-mail: sie58@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5859-1024>