

Управление запасами в цепях поставок на основе линейной дискретной системы с квадратичным критерием качества

Е.П. Белоусова¹, И.Н. Булгакова¹ ✉

¹ Воронежский государственный университет
Университетская площадь, д. 1, г. Воронеж, 394018, Российская Федерация

✉ e-mail: BulgakonaIrina966@gmail.com

Резюме

Цель исследования. Провести анализ теоретических исследований моделей и методов, используемых в теории управления запасами, и направлений их практической реализации. Представить проблему оптимального управления запасами, как задачу дискретного управления. Задачи подобного типа формулируются в случаях, когда возникает необходимость формирования стратегий управления материально-производственными запасами в цепях поставок, учитывающих их организацию на определенном промежутке времени. Предложить метод решения соответствующей задачи управления.

Методы. В качестве базовой модели рассматривается процесс управления запасами на складе, при котором должен выполняться определенный баланс между продукцией, отпускаемой со склада в производство, отпускаемой под реализацию, а также ее остатками, формирующими запасы следующего периода. Процесс управления запасами в цепях поставок в течение планового периода основан на процедуре поиска соответствующего управляющего воздействия для линейной дискретной управляемой системы с квадратичным показателем качества. Реализация управления использует принцип обратной связи. В качестве инструмента реализации управления выбрана система компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

Результаты. В рамках изучения способов нахождения оптимального управления было выделено два метода решения – метод поиска оптимального программного управления и метод определения оптимального управления по принципу обратной связи. В процессе верификации полученного решения рассмотрены несколько модельных примеров, отличающихся начальными условиями.

Заключение. Результаты тестирования предлагаемой дискретной модели показали, что метод обратной связи позволяет достаточно эффективно решать задачу управления запасами с различными начальными условиями, которая описывается системой разностных уравнений.

Ключевые слова: производственные запасы; распределение; дискретная модель; оптимальное управление; метод обратной связи; система разностных уравнений.

Конфликт интересов: Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Для цитирования: Белоусова Е.П., Булгакова И.Н. Управление запасами в цепях поставок на основе линейной дискретной системы с квадратичным критерием качества // Известия Юго-Западного государственного университета. 2022; 26(3): 47-62. <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2022-26-3-47-62>.

Поступила в редакцию 29.06.2022

Подписана в печать 17.08.2022

Опубликована 30.09.2022

Inventory Management in Supply Chains Based on a Linear Discrete System with a Quadratic Quality Criterion

Elena P. Belousova¹, Irina N. Bulgakova¹ ✉

¹ Voronezh State University
1, University Square, Voronezh 394018, Russian Federation

✉ e-mail: BulgakonaIrina966@gmail.com

Abstract

Purpose of research. To analyze theoretical studies of models and methods used in the theory of inventory management and directions of their practical implementation. To present the problem of optimal inventory management as a discrete control problem. Tasks of this type are formulated in cases where there is a need to form strategies of management of material and production inventories in supply chains, taking into account their organization at a certain time interval. To propose a method for solving the corresponding management problem.

Methods. As a basic model, we consider the process of inventory management in the warehouse, in which a certain balance between the products released from the warehouse into production, released for sale, as well as its residues, which form the inventory of the next period must be fulfilled. The process of inventory management in supply chains during the planning period is based on the procedure of finding the appropriate control action for a linear discrete controlled system with a quadratic quality index. Implementation of control uses the principle of feedback. The computer algebra system Wolfram Mathematica is chosen as a tool for implementing the control.

Results. Within the framework of studying the methods of finding the optimal control, two solution methods were singled out - the method of finding the optimal program control and the method of determining the optimal control according to the feedback principle. In the process of verification of the obtained solution, several model examples with different initial conditions were considered.

Conclusion. The results of testing the proposed discrete model showed that the feedback method makes it possible to quite efficiently solve the inventory management problem with different initial conditions, which is described by a system of difference equations.

Keywords: production inventories; distribution; discrete model; optimal control; feedback method; system of difference equations.

Conflict of interest. The authors declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

For citation: Belousova E. P., Bulgakova I. N. Inventory Management in Supply Chains Based on a Linear Discrete System with a Quadratic Quality Criterion. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta = Proceedings of the Southwest State University*. 2022; 26(3): 47-62 (In Russ.). <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2022-26-3-47-62>.

Received 29.06.2022

Accepted 17.08.2022

Published 30.09.2022

Введение

Наличие необходимых запасов продукции является ключевым фактором стабильного функционирования организации, обеспечения потребностей клиента, а также выполнения планируемого оборота. Принятие оптимального уровня запасов товаров приходится на основе целого набора критериев, например, частоты поставок, их минимальные и максимальные объемы, условия оптимизации, режима передачи данных, уровня страховых, минимальных и максимальных размеров запасов, рисков потери продукции из-за истечения срока годности. Основой для решения проблемы оптимизации могут стать методы, используемые в теории управления запасами. Теоретические исследования в области менеджмента запасов условно можно разделить на два основных направления, а именно, исследования в сфере прикладной логистики [1-4], исследования в сфере теории управления запасами [5-9]. Как правило, в подобных исследованиях делается акцент в основном на детальный анализ закономерностей, присутствующих в производственных системах.

В статье рассматривается дискретная модель задачи оптимального управления запасами. Задача такого типа формулируется в случаях, когда существует необходимость создания запаса некоторых продуктов на заданном промежутке времени. В ходе решения определяется количество заказываемых продуктов и сроки реализации заказов.

Отвечая на вопрос о количестве товаров в заказе, будем рассматривать такой размер заказа, от которого будет зависеть количество ресурсов, необходимых для реализации каждого из последующих заказов. Прежде чем искать ответ на вопрос о сроках реализации, необходимо определить тип рассматриваемой системы. Если система имеет периодический тип контроля состояния запасов продуктов, тогда заказ будет формироваться в определенные (обычно равные) промежутки времени. Если же система имеет непрерывный тип контроля состояния запасов, тогда срок следующего заказа будет определяться состоянием запасов на текущий момент времени.

Стоит отметить, что задача усложняется тем фактом, что необходимо не просто ответить на заданные вопросы, но и найти такие решения, чтобы реализация заказов осуществлялась с минимальными затратами.

На первый взгляд ответить на поставленные вопросы не составляет большого труда. Однако понятие оптимальности управления запасами в конкретной системе подразумевает условие минимизации суммарных затрат на заказы, а, соответственно, и на ресурсы. Заметим, что универсальную процедуру управления запасами, учитывающую и обобщающую максимально возможное количество параметров, которые наблюдаются в реальной системе, на практике построить достаточно сложно.

Материалы и методы

Будем рассматривать задачу управления материально-производственными запасами продукции на складе, представленную дискретной моделью [10; 11], для которой определено:

n – количество типов выпускаемой продукции;

m – количество видов используемых ресурсов, необходимых для выпуска продукции;

N – количество периодов времени, в течение которых необходимо принимать управляющие решения;

$k = k_0$ – момент начала процесса.

Для решения задачи удобно ввести следующие обозначения. Пусть вектор

$$x(k) = \{x_1(k), \dots, x_n(k)\}, \quad (1)$$

$$k = k_0, k_0 + 1, \dots, N - 1$$

представляет собой остатки материально-производственных запасов, сформировавшихся на складе к концу k -го периода.

Вектор

$$u(k) = \{u_1(k), \dots, u_m(k)\}, \quad (2)$$

$$k = k_0, k_0 + 1, \dots, N - 1$$

представим как вектор объемов ресурсов, необходимых для производства единицы продукции, а вектор

$$w(k) = \{w_1(k), \dots, w_n(k)\}, \quad (3)$$

$$k = k_0, k_0 + 1, \dots, N - 1$$

как вектор, характеризующий объемы продукции, реализованной со склада в k -й период времени. В таких обозначениях процесс изменения количества то-

варов описывается следующей системой разностных уравнений:

$$x(k+1) = x(k) + Bu(k) - w(k), \quad (4)$$

$$k = k_0, k_0 + 1, \dots, N - 1,$$

в которой $B_{n \times m}$ – технологическая матрица.

Между количеством поставленных в момент времени k товаров со склада $w_i(k)$ и количеством имеющихся в наличии в момент времени k товаров $x_i(k)$ существует зависимость, определяемая правилом

$$w_i(k) = a_i(k)x_i(k), \quad 0 \leq a_i \leq 1. \quad (5)$$

В соотношениях (5) коэффициенты $a_i(k)$ указывают, какая часть продукции i -го вида будет реализована в следующем периоде.

В данном случае речь идет о технологическом переделе, т.е. части технологического процесса или комплекса производственных операций, по завершении которого получается законченный полуфабрикат. Данный полуфабрикат может быть продан на сторону или использован на следующем переделе собственного производства. Один из переделов (заключительный) заканчивается получением не полуфабриката, а готовой продукции. В результате на каждом последовательном переделе образуются остатки промежуточной продукции, которые можно считать материально-производственным запасом для последующего этапа.

Проведя некоторые преобразования, систему уравнений (4) можно переписать в виде:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + Bu(k) - w(k), \quad (6)$$

$$k = k_0, k_0 + 1, \dots, N-1,$$

где

$$A_{n \times n}(k) = \begin{bmatrix} 1-a_1(k) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1-a_2(k) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1-a_n(k) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Заметим, кроме того, что по условию задачи известны начальное состояние системы $x(k_0) = x_0$ и конечное состояние $x(N) = x_1$. Эффективность работы системы за период времени N определяется квадратичным критерием качества:

$$I(u) = \sum_{k=k_0}^{N-1} u^T(k)u(k). \quad (8)$$

Величина $I(u)$ позволяет обобщить все затраты на производство за весь плановый период.

Методы, реализующие решение задач управления с предлагаемым критерием (8), достаточно подробно рассмотрены и обоснованы. Родственные задачи описаны, например, в работах [10, 12-15, 19]. В сформулированной задаче требуется найти оптимальное управляющее воздействие $u^0(k)$, позволяющее перевести систему из заданного начального состояния $x(k_0) = x_0$ в заданное конечное состояние $x(N) = x_1$. Кроме того, вычисляя управление на каждом промежуточном шаге, необходимо находить соответствующие ему состояния системы $x(k)$, $k = k_0, k_0 + 1, \dots, N-1$. Очевидно, что оптимальность

искомого управления $u^0(k)$ подразумевает, что величина качества $I(u^0)$ будет наименьшей. Другими словами, должно быть справедливо неравенство:

$$I(u^0) = \sum_{k=k_0}^{N-1} u^{0T}(k)u^0(k) \leq \sum_{k=k_0}^{N-1} u^T(k)u(k). \quad (9)$$

Для построения управляющего воздействия применяется метод обратной связи, изложенный в [12]. Приведем обоснование оптимальности такого управления.

Управляющее воздействие находится в виде функции $u(t)$, которая переводит систему из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в конечное $x(t_N) = x_1$. Оба условия предполагаются заданными заранее. Такие задачи называются задачами программного управления. Этот термин подчеркивает, что движение $x(t)$ осуществляется по программе, определяемой выбранным заранее управлением $u(t)$. Тем не менее, существует достаточно ситуаций, когда управление по программе не эффективно, поскольку в реальных условиях работы системы оказывается неудовлетворительным. Основной недостаток программного управления состоит в том, что он не учитывает возможные дополнительные факторы, возникающие в ходе реализации процесса. Так, если в системе в некоторый момент времени $t = t_*$ возникнут непредвиден-

ные изменения $\Delta x(t_*)$ вектора $x(t)$, то заданное, неизменное при $t \geq t_*$ программное управление $u(t)$ поведет систему, начиная с момента $t = t_*$ в состояние $x(t_N)$, отличное от заданного в условии задачи конечного состояния x_1 . В подобных ситуациях воздействие u должно формироваться с учетом возможной поступающей дополнительной информации. Этому требованию отвечает управление, построенное по принципу обратной связи. Суть этого принципа состоит в том, что в каждый момент времени t управление u определяется на основе информации о текущем состоянии системы. Таким образом, воздействие u будет иметь вид $u(t, x(t))$ и зависеть не только от времени t , как программное управление, но и от состояния системы $x(t)$ в текущий момент времени.

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть заданы момент времени $t = t_N$ и состояние $x(t_N) = x_1$, в которое необходимо привести систему (6) к моменту времени t_N управлением $u = u^0[t, x]$. Время начала процесса и исходное состояние системы заранее не заданы и могут оказаться произвольными в пределах $0 \leq t \leq t_N$. Функцию $u^0[t, x]$ необходимо выбрать так, чтобы при любых начальных условиях $t = t_0$, $x = x_0$ достигался минимум критерия качества (8), то есть, чтобы выполнялось неравенство (9).

Будем предполагать, что система вполне управляема на отрезке $t_0 \leq t \leq t_N$. Примем, что начальный момент времени $t = t_0$ и начальное состояние системы $X = X_0$ выбраны. Известно также, что функция $u(\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t_N$, разрешающая поставленную задачу, имеет вид:

$$u(\tau) = M_1(\tau, t_0, t_N)x_0 + M_2(\tau, t_0, t_N)x_1, \quad (10)$$

где M_1 и M_2 – некоторые матрицы. Эту функцию в дальнейшем удобно обозначать символом $u_{t_0, x_0}(\tau)$, а соответствующее ему программное движение – символом $x_{t_0, x_0}(t)$. В частности, при $\tau = t_0$ получим:

$$u_{t_0, x_0}(t_0) = M_1(t_0, t_0, t_N)x_0 + M_2(t_0, t_0, t_N)x_1. \quad (11)$$

Так как величины t_N и x_1 по условию заданы, то правую часть равенства (11) будем рассматривать как функцию от $t = t_0$ и $x = x_0$ [16]:

$$u_{t, x}(t) = P(t)x + q(t) = r[t, x]. \quad (12)$$

Именно эта функция r , посчитанная для всех возможных значений t и x , и дает решение поставленной задачи. Другими словами,

$$u^0[t, x] = r[t, x] = P(t)x + q(t). \quad (13)$$

Проверим справедливость приведенного выше утверждения. Во-первых, построенная функция u^0 непрерывна по своим аргументам и, таким образом, является возможным управлением. Во-вторых, остается лишь проверить, что

движение $x_{t_0, x_0}(t)$ при $t_0 \leq t \leq t_N$ есть решение $x[t]$ уравнения:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu^0[t, x(t)] = \\ &= Ax(t) + B(px(t) + q), \end{aligned} \quad (14)$$

причем, $u[t] = u^0[t, x_{t_0, x_0}(t)] = u_{t_0, x_0}(t)$.

С этой целью воспользуемся одним важным обстоятельством. Пусть t_γ – какой-нибудь момент времени из интервала (t_0, t_N) , тогда отрезок $t_\gamma \leq t \leq t_N$ оптимального движения $x_{t_0, x_0}(t)$ является оптимальным движением $x_{t_\gamma, x_\gamma}(t)$ с новым начальным условием $x_\gamma = x_{t_0, x_0}(t_\gamma)$. Это утверждение представляет собой основу принципа оптимальности. Следовательно, можно записать равенство:

$$u_{t_0, x_0}(t_\gamma) = u_{t_\gamma, x_\gamma}(t_\gamma) = u[t_\gamma, x_\gamma]. \quad (15)$$

Теперь по определению функций $u_{t_0, x_0}(t)$, $x_{t_0, x_0}(t)$ и вследствие (15) получаем:

$$\begin{aligned} x_{t_0, x_0}(t_\gamma + 1) &= Ax_{t_0, x_0}(t_\gamma) + Bu_{t_0, x_0}(t_\gamma) = \\ &= Ax_{t_0, x_0}(t_\gamma) + Bu[t_\gamma, x_{t_0, x_0}(t_\gamma)], \end{aligned} \quad (16)$$

что в силу произвольности t_γ доказывает, что функция $x_{t_0, x_0}(t)$ удовлетворяет уравнению (14). Причем, действительно, $u_{t_0, x_0}(t) = u[t, x_{t_0, x_0}(t)]$.

Таким образом, установлено следующее правило: для того, чтобы решить поставленную задачу об оптимальном управлении $u^0[t, x]$ системой (6) по принципу обратной связи, достаточно найти оптимальное управление

$u_{t_0, x_0}(t)$ для соответствующей программной задачи при любых возможных t_0 и x_0 . Тогда

$$u^0[t, x] = u_{t, x}(t). \quad (17)$$

Это утверждение было доказано в условиях минимизации критерия качества (8) на движениях линейной системы [12]. В действительности оно сохраняет свою силу для достаточно широкого класса задач. Обратим внимание на важное условие, которое должно выполняться относительно системы (6) [12].

Условие 1. Для того, чтобы система (6) была управляемой, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$ был равен n .

Для построения программного оптимального управления введем обозначения:

$$s(k_0, x_0) = x_1 - A^{N-k_0} x_0, \quad (18)$$

$$S(k) = A^{N-k-1} B, \quad (19)$$

$$H^{(k_0)} = [S(k_0), S(k_0+1), \dots, S(N-1)], \quad (20)$$

где матрица $H^{(k_0)}$ имеет размерность $n \times (m(N-k_0))$. Пусть значения x_0 , x_1 и момент времени k_0 такие, что выполняется следующее

Условие 2. Вектор $s(k_0, x_0)$ принадлежит подпространству, натянутому на линейно независимые столбцы матрицы $H^{(k_0)}$.

Это условие равносильно требованию полной управляемости системы (6). Тогда справедливо

Утверждение 1. Для того, чтобы управления $\{u(k_0), u(k_0+1), \dots, u(N-1)\}$ переводили систему (6) из состояния $x(k_0) = x_0$ в состояние $x(N) = x_1$, необходимо и достаточно, чтобы $u(k_0), u(k_0+1), \dots, u(N-1)$ удовлетворяли матричному уравнению

$$\sum_{k=k_0}^{N-1} S(k)u(k) = c(k_0, x_0). \quad (21)$$

Рассмотрим далее вектор из $m(N - k_0)$ компонент:

$$u^{(k_0)} = \begin{pmatrix} u(k_0) \\ u(k_0+1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Тогда равенство (21) может быть представлено в виде

$$H^{(k_0)} u^{(k_0)} = c(k_0, x_0). \quad (23)$$

Для решения уравнения (23) с условием (9) введем в рассмотрение псевдообратную матрицу $H^{+(k_0)}$ со следующим ее представлением [17]:

$$H^{+(k_0)} = H^{T(k_0)} [H^{(k_0)} H^{T(k_0)}]^+. \quad (24)$$

Для лаконичной записи, учитывая определение $H^{(k_0)}$, обозначим:

$$\begin{aligned} D(k_0) &= H^{(k_0)} H^{T(k_0)} = \\ &= \sum_{k=k_0}^{N-1} S(k) S^T(k), \end{aligned} \quad (25)$$

где $D(k_0)$ – симметрическая, неотрицательно определенная матрица размерности $n \times n$, для которой, согласно [12]:

$$D^+(k) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^{-1} v_i v_i^T, \quad (26)$$

где $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$ – собственные значения матрицы $D(k_0)$, $v_1, v_2, \dots, v_r$ – ортонормированные собственные векторы, отвечающие соответствующим собственным значениям. Тогда,

$$H^{+(k_0)} = H^{T(k_0)} D^+(k_0). \quad (27)$$

В обозначениях, принятых выше, решение [17] уравнения (27) задается формулой:

$$u^{0(k_0)} = H^{+(k_0)} c(k_0, x_0) \quad (28)$$

или

$$u^{0(k_0)} = H^{T(k_0)} D^+(k_0) c(k_0, x_0). \quad (29)$$

Выбрав k -ю компоненту вектора $u^{0(k_0)}$, получим оптимальное программное управление на k -м шаге, $(k_0 \leq k \leq N-1)$:

$$\begin{aligned} u^0(k) &= S^T(k) D^+(k_0) c(k_0, x_0), \\ k &= k_0, k_0+1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (30)$$

которое далее будем обозначать как

$$u^0(k) = u^0(k; k_0, x_0). \quad (31)$$

Отметим, что применительно к решению задач теории управления псевдообратные матрицы использовались, в частности, в [13]. Для решения задачи поиска оптимального управляющего воздействия методом обратной связи введем следующие обозначения:

$$c(k) = c(k, x(k)) = x_1 - A^{N-k} x(k), \quad (32)$$

$$D(k) = \sum_{i=k}^{N-1} S(i) S^T(i). \quad (33)$$

Будем рассматривать правую часть равенства (19) как функцию от $k_0 = k$, $x_0 = x(k)$. Тогда управление, построен-

ное по принципу обратной связи ([2]), будет иметь вид:

$$\begin{aligned} u^0[k, x(k)] &= u^0[k; k, x(k)] = \\ &= S^T(k) D^+(k) c(k), \\ k &= k_0, k_0 + 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (34)$$

Приведем вспомогательную теорему.

Теорема. Пусть выполнено условие 2 и $u^0(k; k_0, x_0)$ - оптимальное программное управление, переводящее систему (6) из начального состояния в конечное. Тогда $u^0(k; k_0, x_0)$ и управление, построенное по принципу обратной связи $u^0[k; k, x(k)]$, на движении $x_0(k)$ совпадают, т.е.

$$\begin{aligned} u^0[k; k, x_0(k)] &= S^T(k) D^+(k) c(k) = \\ &= u^0[k; k, x_0] = S^T(k) D^+(k_0) c(k_0), \end{aligned} \quad (35)$$

при всех $k = k_0, k_0 + 1, \dots, N-1$.

Следовательно, $u^0(k, x(k))$ из (34) – это оптимальное управление, построенное методом обратной связи. Промежуточные состояния системы, будут зависеть от $u^0(k)$ и будут иметь вид:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + Bu(k), \\ k &= k_0, k_0 + 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Если при построении стратегии управления запасами необходимо обеспечить целочисленность векторов $x(k)$, характеризующих объем материально-производственных запасов в момент времени k , то величины $u(k)$ и значение критерия качества, будут определены, возможно, с некоторой погрешностью. Такая погрешность, как показано

Рыжиковым Ю.И. [5, с. 176-178], не является существенной и не оказывает серьезного влияния на принятие управленческого решения.

Результаты и их обсуждение

В качестве иллюстрации предлагаемого подхода рассмотрим процесс формирования стратегии управления материально-производственными запасами на плановый период 5 месяцев ($N=5$, $k=1,2,3,4,5$ – порядковый номер месяца), $k_0=1$.

Производственная программа рассчитана на производство 3-х видов продукции ($n=3$) с использованием ресурсов 2-х типов ($m=2$).

Начальное состояние системы предполагает наличие готовой продукции каждого вида в объеме $x(k_0)$ (в условных единицах):

$$x(k_0) = x_0 = (100, 50, 150),$$

конечное состояние системы через 5 плановых месяцев предполагает выход на производство готовой продукции каждого вида в объеме $x(N)$ (в условных единицах):

$$x(N) = x_1 = (1000, 1800, 2000).$$

Специфика рассматриваемого производства заключается в том, что ежемесячно часть продукции реализуется, а часть используется на внутренние потребности предприятия. Подобная структура производства характерна, например, для перерабатывающих отраслей, когда, часть продукции как результат

переработки (полуфабрикат) востребована в смежной отрасли, а часть продолжает перерабатываться на следую-

щем этапе. Доли реализуемой в k -й период времени продукции $a_i(k)$, $i=1,2,3$, представлены в табл. 1.

Таблица 1. Доли реализуемой в k -й период времени продукции

Table 1. Proportion of products sold in the k -th period of time

$a_i(k)$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$a_1(k)$	0,5	0,65	0,8	0,85	0,9
$a_2(k)$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,85
$a_3(k)$	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95

Технологическая матрица затрачиваемых ресурсов, показывающая, какое количество определенного вида продукции необходимо для последующего производства, имеет вид:

$$B = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,05 \\ 0,04 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

Требуется найти величины ресурсов $u(k)$, минимизирующие критерий качества (8), а также объемы материально-производственных запасов, которые необходимо сформировать на конец k -го периода $x(k)$, чтобы к концу планового периода выйти на ранее заявленные показатели.

Обобщим рассматриваемые утверждения (10)-(35) в виде алгоритма (рис.1).

В качестве инструмента реализации алгоритма выбрана система компьютерной алгебры Wolfram Mathematica [20]. Полученные результаты представлены на рис. 2.

Выводы

Дискретные управляемые системы возникают, если появляется необходимость управлять распределением ресурсов через определенные фиксированные промежутки времени. Примером подобной системы является производственная система с несколькими последовательных технологически законченными переделами. Основная проблема для данных систем – организация управленческого учета, где возникает необходимость введения поперечного метода учета затрат и калькулирования себестоимости. Для корректного расчета себестоимости необходим механизм, реализующий эффективный контроль за использованием сырья (материально-производственных запасов), движением полуфабрикатов и готовой продукции.

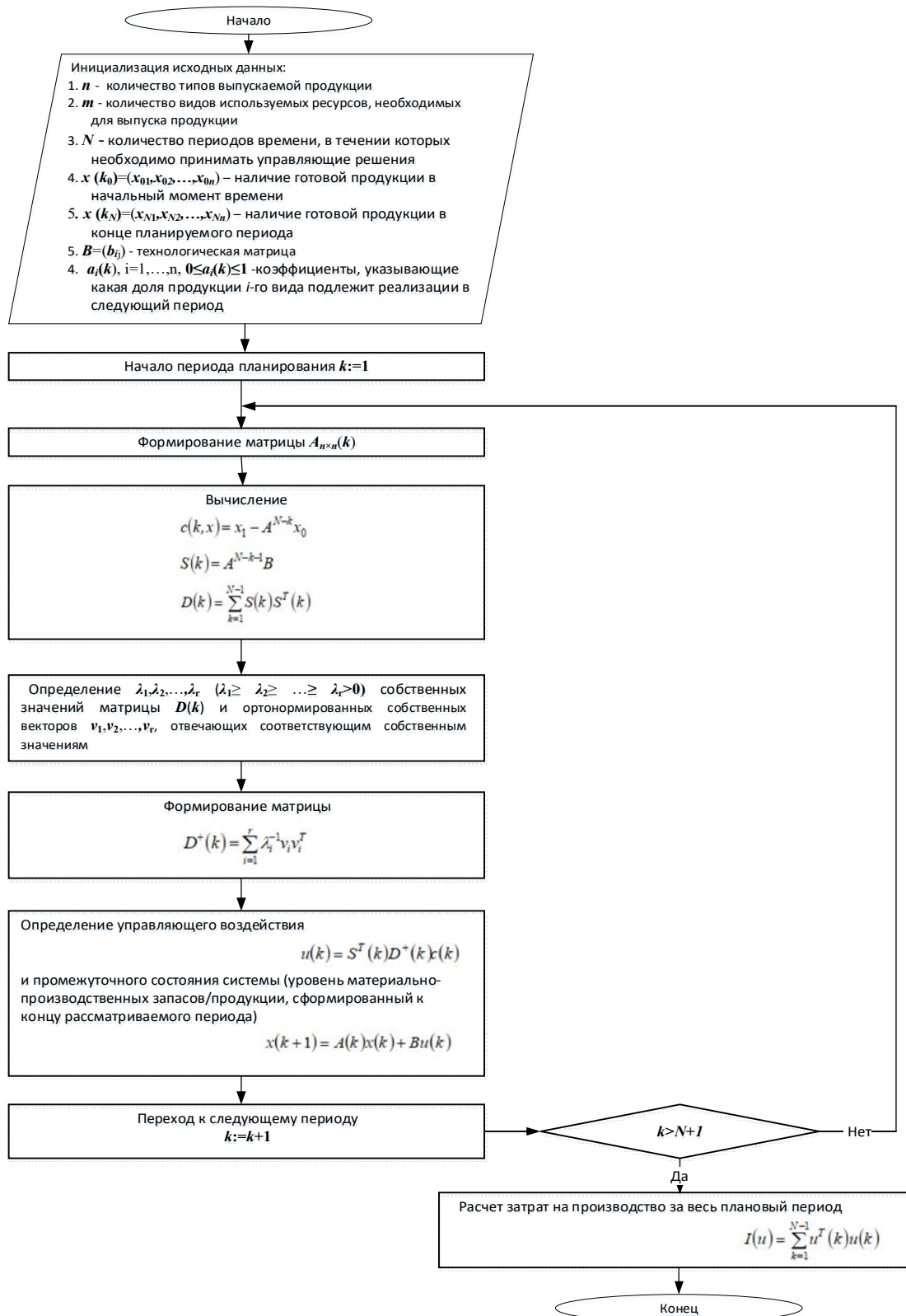


Рис. 1. Алгоритм формирования стратегии управления материально-производственными запасами методом обратной связи

Fig. 1. Algorithm of forming the strategy of management of inventories by feedback method

Количество видов продуктов $n=3$
 Количество видов ресурсов $m=2$
 Количество промежутков времени $N=5$
 Начальное состояние системы $x[k_0]=\{10, 50, 150\}$
 Конечное состояние системы $x[N]=\{1000, 1800, 2000\}$

Промежуточные значения $u[k]$ и $x[k]$:

$u[k_0] = \{389.679, 1148.14\}$
 $x[k_1] = \{101.375, 155.401, 291.717\} = \{101, 155, 292\}$

$u[k_1] = \{336.926, 1149.46\}$
 $x[k_2] = \{126.647, 190.583, 303.539\} = \{127, 191, 304\}$

$u[k_2] = \{403.54, 1590.51\}$
 $x[k_3] = \{145.209, 232.367, 340.821\} = \{145, 232, 341\}$

$u[k_3] = \{962.025, 3604.9\}$
 $x[k_4] = \{298.229, 445.444, 683.179\} = \{298, 445, 683\}$

$u[k_4] = \{907.386, 17\,023.3\}$
 $x[k_5] = \{971.724, 1805.44, 2008.7\} = \{972, 1805, 2009\}$

Критерий качества $I[u] = 3.10131 \times 10^8$

Рис. 2. Результаты программных вычислений

Fig. 2. The results of software calculations

В работе наглядно продемонстрированы результаты, которые показывают, что метод обратной связи позволяет эффективно решать задачу управления запасами, которая описывается системой разностных уравнений.

Использование подобного подхода в логистическом менеджменте создаст возможность для оперативного регулирования нормативов использования сырья и полуфабрикатов, что, в конечном итоге, значительно снизит технологические потери и материальные затраты.

Список литературы

1. Астраханцева А. С., Кириллова Т. К. Прикладные аспекты применения элементов логистики в управлении запасами // Региональные проблемы преобразования экономики. 2019. №1 (99). С. 97-102.
2. Кузнецов Н. В., Шишкова Е.Е. Совершенствование отдельных элементов системы управления запасами организации // Потребительская кооперация. 2019. № 1(65). С. 36-40.
3. Полуэктов В.А., Якутин Е.М. Сравнительный анализ методов управления запасами при неравномерном спросе // Организатор производства. 2021. № 1. С. 106-113.
4. Алешина А. В., Булгаков А. Л. О некоторых особенностях применения инструментов управления закупками и запасами товарно-материальных ценностей // Финансовые рынки и банки. 2022. №7. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/o-nekotoryh-osobennostyah-primeneniya-instrumentov-upravleniya-zakupkami-i-zapasami-tovarno-materialnyh-tsennostey>.
5. Рыжиков Ю.И. Логистика и теория очередей. М.: Изд-во «Лань», 2022. 456 с.
6. Капустин Е. В., Шкуркин А.С. Оптимизация параметров стохастической модели управления запасами // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2019. №46. С. 56-63.
7. Бажина Д. Б., Лукинский В. С., Николаевский Н. Н. Имитационное моделирование цепей поставок на основе системной динамики // Логистика и управление цепями поставок. 2020. № 1 (96). С. 47-56.
8. Никитина С. А., Ухоботов В. И. Дискретные динамические системы с помехой и их приложения к решению задачи управления запасами // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2021. № 2. С. 5-19.
9. Никитина С. А., Ухоботов В. И. Одномерная задача управления запасами при нечетком спросе // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 3. С. 152–162.
10. Сазанова Л. А. Дискретная модель управления запасами как задача оптимального управления // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Экономика и управление. 2017. № 3. С. 184-187.
11. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973. 256 с.
12. Красовский Н. Н. Теория управления движением: Линейные системы. М.: Издательство «НАУКА»; Главная редакция физико-математической литературы, 1968. 475 с.

13. Альбрехт Э. Г., Сазанова Л. А. Синтез оптимального управления в линейных дискретных системах // Труды института математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6. № 1-2. С. 477-496.
14. Калман Р.Е. Об общей теории управления // Тр. I Междунар. Конгр. по автомат. упр. М.: Изд-во АН СССР, 1961. Т. 2. С. 56-62.
15. Надеждин П.В. О свойствах оптимальных и линейных импульсных систем // Изв. АН СССР, Техн. кибернетика. 1964. Вып. 4. С. 104-112.
16. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
17. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986. 232 с.
18. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980. 400 с.
19. La Salle J.P. The stability and control of discrete processes. N.Y.: Springer-Verlag, 1986. 150 p. (Applied Mathematical Sciences; Vol. 62).
20. Wolfram Mathematica. URL: <https://www.wolfram.com/mathematica/?source=nav> (дата обращения: 19.06.2022)

References

1. Astraxanceva A. S., Kirillova T. K. Prikladnye aspekty primeneniya elementov logistiki v upravlenii zapasami [Applied aspects of the application of elements of logistics in inventory management]. *Regional'nye problemy preobrazovaniya ekonomiki = Regional Problems of Economic Transformation*, 2019, no 1(99), pp. 97-102.
2. Kuznecov N. V., Shishkova E.E. Sovershenstvovanie otidel'nykh elementov sistemy upravleniya zapasami organizatsii [Improvement of individual elements of the organization's inventory management system]. *Potrebitel'skaya kooperatsiya = Consumer Cooperation*, 2019, no 1(65), pp. 36-40.
3. Polue'ktov V.A., Yakutin E.M. Sravnitel'nyi analiz metodov upravleniya zapasami pri neravnomernom sprose [Comparative analysis of inventory management methods for uneven demand]. *Organizator proizvodstva= Production Organizer*, 2021, no. 1, pp. 106-113.
4. Aleshina A. V., Bulgakov A. L. O nekotorykh osobennostyakh primeneniya instrumentov upravleniya zakupkami i zapasami tovarno-material'nykh tsennostei [On some specifics of the application of procurement and inventory management tools]. *Finansovye rynki i banki = Financial Markets and Banks*, 2022, no. 7. Available at: <https://cyberleninka.ru/article/n/o-nekotorykh-osobennostyakh-primeneniya-instrumentov-upravleniya-zakupkami-i-zapasami-tovarno-materialnykh-tsennostey>
5. Ry'zhikov Yu.I. *Logistika i teoriya ocheredey* [Logistics and queuing theory]. Moscow, Lan Publ., 2022. 456 p.

6. Kapustin E. V., Shkurkin A.S. Optimizatsiya parametrov stokhasticheskoi modeli upravleniya zapasami [Optimization of stochastic inventory management model parameters]. *Vestn. Tom. gos. un-ta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika = Bulletin of Tomsk State University. Management, Computer Science and Informatics*, 2019, no. 46, pp. 56-63.
7. Bazhina D. B., Lukinskij V. S., Nikolaevskij N. N. Imitacionnoe modelirovanie cepej postavok na osnove sistemnoj dinamiki [Supply chain simulation based on system dynamics]. *Logistika i upravlenie cepyami postavok = Logistics and Supply Chain Management*, 2020, no. 1(96), pp. 47-56.
8. Nikitina S. A., Uxobotov V. I. Diskretnye dinamicheskie sistemy s pomekhai i ikh prilozheniya k resheniyu zadachi upravleniya zapasami [Discrete Dynamic Systems with Interference and their Applications to the Problem of Inventory Management]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Vychislitel'naya matematika i informatika = Bulletin of South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Computer Science*, 2021, no. 2, pp. 5-19.
9. Nikitina S. A., Uxobotov V. I. Odnomernaya zadacha upravleniya zapasami pri nechetkom sprose [One-dimensional inventory management problem with fuzzy demand]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN = Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch, Russian Academy of Sciences*, 2021, vol. 27, no 3, pp.152–162.
10. Sazanova L. A. Diskretnaya model' upravleniya zapasami kak zadacha optimal'nogo upravleniya [Discrete model of inventory management as an optimal management problem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Ekonomika i upravlenie = Vestnik Voronezh State University. Series: Economics and Management*, 2017, no. 3, pp. 184-187.
11. Propoy A.I. *Elementy teorii optimal'nykh diskretnykh protsessov* [Elements of Optimal Discrete Process Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 256 p.
12. Krasovskij N. N. *Teoriya upravleniya dvizheniem: Lineinye sistemy* [Theory of Motion Control: Linear Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 475 p.
13. Albrext E. G., Sazanova L. A. Sintez optimal'nogo upravleniya v lineinykh diskretnykh sistemakh [Synthesis of Optimal Control in Linear Discrete Systems]. *Trudy instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN = Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch, Russian Academy of Sciences*, 2000, vol. 6, no. 1-2, pp. 477-296.
14. Kalman P.E. Ob obshhej teorii upravleniya [On the General Theory of Control]. *Proceedings of the I International Congress on Automatic Control*. Moscow, 1961, vol. 2, pp. 56-62.
15. Nadezhdin P.V. O svoistvakh optimal'nykh i lineinykh impul'snykh sistem [On the Properties of Optimal and Linear Pulse Systems]. *Izv. AN SSSR = Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR, Technical Cybernetics*, 1964, vol. 4, pp. 104-112.

16. Gantmacher F. R. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 576 p.
17. Louson Ch., Xenson P. *Chislennoe reshenie zadach metoda naimen'shikh kvadratov* [Numerical solution of least squares method problems]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 232 p.
18. Voevodin V.V. *Lineinaya algebra* [Linear Algebra]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 400 p.
19. La Salle J.P. The stability and control of discrete processes. N.Y.: Springer-Verlag, 1986. 150 p. (Applied Mathematical Sciences; Vol. 62).
20. Wolfram Mathematica. Available at: <https://www.wolfram.com/mathematica/?source=nav> (data obrashheniya: 19.06.2022)

Информация об авторах / Information about the Authors

Белюсова Елена Петровна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра системного анализа и управления, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: e.p.belousova@gmail.com

Elena P. Belousova, Cand. of Sci. (Physical and Mathematical), Associate Professor, System Analysis and Management Department, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation, e-mail: e.p.belousova@gmail.com

Булгакова Ирина Николаевна, доктор экономических наук, доцент, кафедра системного анализа и управления, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: BulgakonaIrina966@gmail.com
SPIN-код: 5323- 8720,
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-17795877>

Irina N. Bulgakova, Dr. of Sci. (Economics), Associate Professor, System Analysis and Management Department, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation, e-mail: BulgakonaIrina966@gmail.com
SPIN code: 5323- 8720,
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-17795877>